

sommaire

Avant-propos.....	4
1 Propriétés physiques des fluides.....	5
1.1 Introduction : qu'est-ce qu'un fluide ?.....	5
1.2 L'hypothèse du milieu continu.....	6
1.3 Masse volumique, poids volumique, densité.....	7
1.4 Compressibilité	8
1.5 Viscosité	8
1.6 Tension superficielle et capillarité	11
1.7 Pression de vapeur saturante et cavitation.....	13
1.8 Exercices résolus	14
2 Statique des fluides (hydrostatique).....	19
2.1 Notion de pression.....	19
2.2 Équation fondamentale de l'hydrostatique.....	21
2.3 Mesure des pressions	22
2.4 Forces de pression sur des parois planes	24
2.5 Forces de pression sur des parois courbes	26
2.6 Poussée d'Archimède et flottabilité	28
2.7 Exercices résolus	29
3 Cinématique des fluides	35
3.1 Description du mouvement.....	35
3.2 Débits et vitesse moyenne	38
3.3 Équation de continuité.....	39
3.4 Notions complémentaires.....	40
3.5 Exercices résolus	41
4 Dynamique des fluides parfaits — Théorème de Bernoulli	44
4.1 Équations d'Euler	44
4.2 Théorème de Bernoulli.....	45

4.3 Applications du théorème de Bernoulli	47
4.4 Généralisation : Bernoulli avec échange d'énergie	50
4.5 Exercices résolus	50
5 Théorème des quantités de mouvement	55
5.1 Énoncé du théorème d'Euler	55
5.2 Applications classiques	57
5.3 Exercices résolus	58
6 Dynamique des fluides réels — Pertes de charge	62
6.1 Les équations de Navier–Stokes	62
6.2 Régimes d'écoulement : expérience de Reynolds	69
6.3 Notion de perte de charge	71
6.4 Pertes de charge linéaires	72
6.5 Pertes de charge singulières	74
6.6 Calcul pratique des conduites	76
6.7 Exercices résolus	76
7 Analyse dimensionnelle et similitude	83
7.1 Dimensions et homogénéité	83
7.2 Théorème de Vaschy–Buckingham (théorème des π)	84
7.3 Nombres sans dimension de l'hydraulique	84
7.4 Similitude et modèles réduits	85
7.5 Exercices résolus	86
8 Introduction aux écoulements à surface libre — Équations de Saint-Venant	90
8.1 Grandeurs géométriques et hydrauliques	90
8.2 Célérité des ondes et nombre de Froude	91
8.3 Écoulement uniforme : formule de Manning–Strickler	93
8.4 Les équations de Saint-Venant	94
8.5 Exercices résolus	96
8.6 Ce qu'il faut retenir	99
9 Problèmes de synthèse corrigés	100

9.1 Problème S.1 — Vanne de chasse d'un barrage et butée	100
9.2 Problème S.2 — Alimentation gravitaire d'une ville	101
9.3 Problème S.3 — Station de pompage avec vérification de cavitation.....	103
9.4 Problème S.4 — Jet d'un canon à eau sur un écran.....	104
9.5 Problème S.5 — Étude complète d'un venturi vertical.....	105
9.6 Problème S.6 — Batardeau flottant échoué puis ballasté	105
9.7 Problème S.7 — Comparaison laminaire/turbulent : transport d'un fluide visqueux	106
10 Sujet d'examen type corrigé.....	107
10.1 Exercice 1 — Hydrostatique (6 points).....	108
10.2 Exercice 2 — Bernoulli et quantité de mouvement (7 points)	108
10.3 Exercice 3 — Fluides réels (7 points)	109
11 Exercices d'entraînement (avec réponses).....	110
11.1 Série 1 — Propriétés des fluides.....	111
11.2 Série 2 — Hydrostatique.....	111
11.3 Série 3 — Cinématique	112
11.4 Série 4 — Fluide parfait	113
11.5 Série 5 — Quantité de mouvement.....	113
11.6 Série 6 — Fluides réels.....	114
11.7 Série 7 — Analyse dimensionnelle et similitude.....	114
12 Annexe A — Formulaire récapitulatif.....	115
13 Annexe B — Données numériques usuelles	117
14 Annexe C — Rappels mathématiques utiles.....	117
14.1 Opérateurs vectoriels (coordonnées cartésiennes)	117
14.2 Géométrie des surfaces usuelles.....	118
14.3 Intégrales et développements utiles	118
14.4 Trigonométrie	119
14.5 Unités SI et conversions	119
14.6 Alphabet grec utilisé dans ce cours	119

14.7 Conseils de méthode pour les examens	119
15 Annexe D — Équations de Navier–Stokes : formulation tensorielle et coordonnées cylindriques	120
15.1 Le tenseur des contraintes	120
15.2 Bilan de quantité de mouvement : équation de Cauchy	122
15.3 Écriture complète en coordonnées cylindriques r, θ, z	122
15.4 Application 1 — Poiseuille cylindrique, version détaillée	123
15.5 Application 2 — Viscosimètre de Couette cylindrique, version détaillée	124
15.6 Récapitulatif de la démarche générale	125
Bibliographie sommaire	125

Avant-propos

Ce polycopié est destiné aux étudiants de première année du cycle d'ingénieur en Génie Civil. Il couvre le programme du premier semestre de mécanique des fluides et constitue le socle indispensable aux enseignements ultérieurs d'hydraulique générale, d'hydraulique urbaine (alimentation en eau potable et assainissement) et d'ouvrages hydrauliques.

Le document est organisé en huit chapitres. Chaque chapitre comporte une partie de cours, illustrée d'exemples d'application, suivie d'une série d'exercices intégralement résolus. Les solutions sont rédigées de manière détaillée, étape par étape, avec un rappel systématique des hypothèses et une vérification des unités. L'étudiant est vivement encouragé à chercher les exercices par lui-même avant de consulter les corrigés.

Les notations adoptées sont celles couramment utilisées dans la littérature francophone. Le Système International d'unités (SI) est utilisé partout ; les unités pratiques (bar, litre, cheval-vapeur) sont signalées lorsqu'elles apparaissent dans la pratique de l'ingénieur.

Prérequis : analyse (dérivées, intégrales simples et multiples), algèbre vectorielle, statique du point et du solide.

Objectifs d'apprentissage. À l'issue de ce cours, l'étudiant doit être capable de :

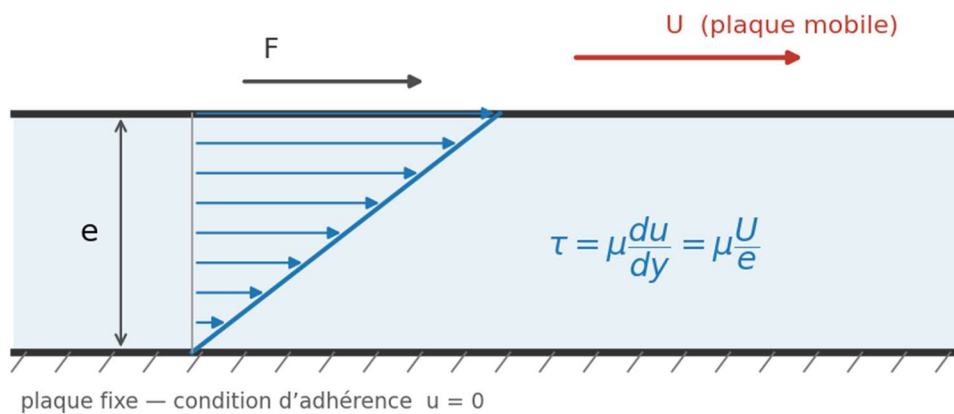
- caractériser un fluide par ses propriétés physiques (masse volumique, viscosité, compressibilité, tension superficielle) ;
- calculer la pression en tout point d'un fluide au repos et exploiter les appareils de mesure de pression ;
- déterminer les forces de pression exercées sur des parois planes ou courbes (vannes, barrages, réservoirs) et étudier la stabilité des corps flottants ;
- décrire un écoulement (lignes de courant, débit, accélération) et appliquer l'équation de continuité ;
- appliquer le théorème de Bernoulli aux écoulements de fluides parfaits et à leurs applications industrielles (Venturi, Pitot, vidange de réservoirs) ;
- appliquer le théorème des quantités de mouvement au calcul des efforts exercés par les écoulements sur les structures ;
- distinguer les régimes laminaire et turbulent, calculer les pertes de charge linéaires et singulières et dimensionner une conduite simple ;
- mettre en œuvre l'analyse dimensionnelle et les règles de similitude pour l'étude sur modèle réduit.

1 Propriétés physiques des fluides

1.1 Introduction : qu'est-ce qu'un fluide ?

La matière se présente usuellement sous trois états : solide, liquide et gazeux. Les liquides et les gaz sont regroupés sous le terme de **fluides**. La distinction fondamentale entre un solide et un fluide réside dans leur comportement vis-à-vis des contraintes de cisaillement :

- un **solide** soumis à une contrainte tangentielle (cisaillement) se déforme d'une quantité finie puis atteint un équilibre statique ;
- un **fluide** soumis à une contrainte tangentielle, aussi faible soit-elle, se déforme **continûment** : il s'écoule. Un fluide au repos ne peut donc supporter aucune contrainte de cisaillement.



Écoulement de Couette : le fluide adhère aux deux plaques et le profil de vitesse est linéaire. La contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse — c'est la définition même d'un fluide newtonien.

On définit ainsi : *un fluide est un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité, qui peut s'écouler, c'est-à-dire subir de grandes variations de forme sous l'action de forces d'autant plus faibles que ces variations sont lentes.*

Au sein des fluides, on distingue :

- les **liquides**, pratiquement incompressibles, qui occupent un volume propre et présentent une surface libre lorsqu'ils sont placés dans un récipient ouvert ;
- les **gaz**, très compressibles, qui occupent tout le volume qui leur est offert.

En génie civil, le fluide de référence est l'**eau** (réseaux d'alimentation, assainissement, ouvrages hydrauliques, actions sur les structures), mais l'ingénieur rencontre aussi l'air (vent, ventilation), les boues, les coulis de ciment et les bitumes.

1.2 L'hypothèse du milieu continu

À l'échelle moléculaire, un fluide est discontinu. La mécanique des fluides ne s'intéresse cependant pas au mouvement individuel des molécules, mais au comportement macroscopique du fluide. On adopte l'**hypothèse du milieu continu** : les propriétés du fluide (masse volumique, pression, vitesse, température) sont des fonctions continues et dérivables des coordonnées d'espace et du temps.

Cette hypothèse est légitime tant que la plus petite dimension caractéristique de l'écoulement reste très grande devant le libre parcours moyen des molécules, ce qui est toujours le cas dans les applications du génie civil. On appelle **particule fluide** un

élément de volume infiniment petit à l'échelle macroscopique, mais contenant un très grand nombre de molécules.

1.3 Masse volumique, poids volumique, densité

1.3.1 Masse volumique

La **masse volumique** ρ (rhô) d'un fluide est la masse de l'unité de volume :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad [\rho] = kg\ m^{-3}$$

Valeurs usuelles à 20 °C et à pression atmosphérique :

Fluide	ρ (kg/m ³)
Eau douce	998 (on prend 1000 en pratique)
Eau de mer	1025
Mercure	13 600
Huile de graissage	880 – 940
Air	1,20

Pour les liquides, ρ varie faiblement avec la température (pour l'eau : 999,7 kg/m³ à 10 °C ; 992,2 kg/m³ à 40 °C) et très faiblement avec la pression : on les considère généralement **incompressibles**. Pour les gaz, ρ dépend fortement de la pression et de la température par l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p = \rho r T$$

où p est la pression absolue (Pa), T la température absolue (K) et r la constante massique du gaz ($r = 287\ J\ kg^{-1}\ K^{-1}$ pour l'air).

1.3.2 Poids volumique

Le **poids volumique** (ou poids spécifique) γ est le poids de l'unité de volume :

$$\gamma = \rho g \quad [\gamma] = N\ m^{-3}$$

Avec $g = 9,81\ m\ s^{-2}$, l'eau a pour poids volumique $\gamma_e = 9810\ N\ m^{-3} \approx 9,81\ kN\ m^{-3}$.

1.3.3 Densité

La **densité** d (sans dimension) d'un fluide est le rapport de sa masse volumique à celle d'un fluide de référence : l'eau pour les liquides, l'air pour les gaz.

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{réf}}}$$

Exemples : $d_{\text{mercure}} = 13,6$; $d_{\text{eau de mer}} = 1,025$.

1.4 Compressibilité

La compressibilité traduit la variation de volume d'un fluide sous l'effet d'une variation de pression. On définit le **coefficient de compressibilité isotherme** :

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad [\chi] = Pa^{-1}$$

et son inverse, le **module d'élasticité volumique** (ou module de compressibilité) :

$$E_v = -V \frac{dp}{dV} = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad [E_v] = Pa$$

Pour l'eau, $E_v \approx 2,2 \times 10^9 Pa = 2200 MPa$: il faut une surpression d'environ 22 MPa (220 bar) pour réduire le volume d'eau de 1 %. C'est pourquoi l'eau est traitée comme incompressible dans la quasi-totalité des problèmes de génie civil. La compressibilité de l'eau ne doit être prise en compte que dans les phénomènes transitoires rapides, notamment le **coup de bélier** dans les conduites en charge.

La célérité du son dans un fluide est liée au module d'élasticité :

$$c = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}}$$

soit environ 1480 m/s dans l'eau et 340 m/s dans l'air.

1.5 Viscosité

1.5.1 Mise en évidence : expérience de Couette

La **viscosité** caractérise la résistance d'un fluide à l'écoulement, c'est-à-dire sa résistance à la déformation par cisaillement. Considérons deux plaques planes parallèles distantes de e , l'espace intermédiaire étant rempli de fluide. La plaque inférieure est fixe ; la plaque supérieure, d'aire A , est animée d'une vitesse constante U sous l'action d'une force tangentielle F .

L'expérience montre que :

- le fluide adhère aux parois (condition de **non-glissement**) : sa vitesse est nulle sur la plaque fixe et vaut U sur la plaque mobile ;
- la répartition de vitesse entre les plaques est linéaire : $u(y) = U y/e$;
- la force nécessaire est proportionnelle à la surface et au gradient de vitesse : $F = \mu A U/e$.

1.5.2 Loi de Newton

La contrainte tangentielle (ou contrainte de cisaillement) $\tau = F/A$ s'écrit dans le cas général :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

C'est la **loi de Newton**. Le coefficient μ (μ) est la **viscosité dynamique** du fluide :

$$[\mu] = Pa \cdot s = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$$

L'ancienne unité CGS, la poise (Po), vaut $0,1 Pa \cdot s$; on rencontre souvent la centipoise : $1 cPo = 10^{-3} Pa \cdot s$.

On utilise fréquemment la **viscosité cinématique** :

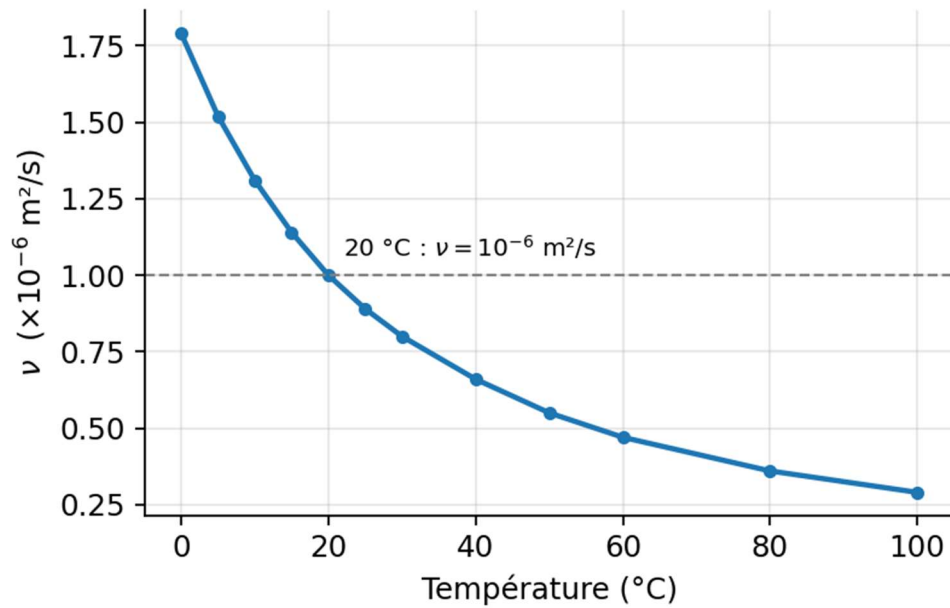
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad [\nu] = m^2 \cdot s^{-1}$$

L'unité CGS est le stokes : $1 St = 10^{-4} m^2/s$; $1 cSt = 10^{-6} m^2/s$.

Valeurs usuelles à $20^\circ C$:

Fluide	μ ($Pa \cdot s$)	ν (m^2/s)
Eau	$1,0 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-6}$
Air	$1,8 \times 10^{-5}$	$1,5 \times 10^{-5}$
Huile moteur	$\sim 0,3$	$\sim 3 \times 10^{-4}$
Glycérine	$1,5$	$1,2 \times 10^{-3}$

Influence de la température. La viscosité des liquides **diminue** quand la température augmente (l'agitation thermique affaiblit la cohésion moléculaire) : pour l'eau, $\nu = 1,79 \times 10^{-6} m^2/s$ à $0^\circ C$ et $0,66 \times 10^{-6} m^2/s$ à $40^\circ C$. Celle des gaz **augmente** avec la température.



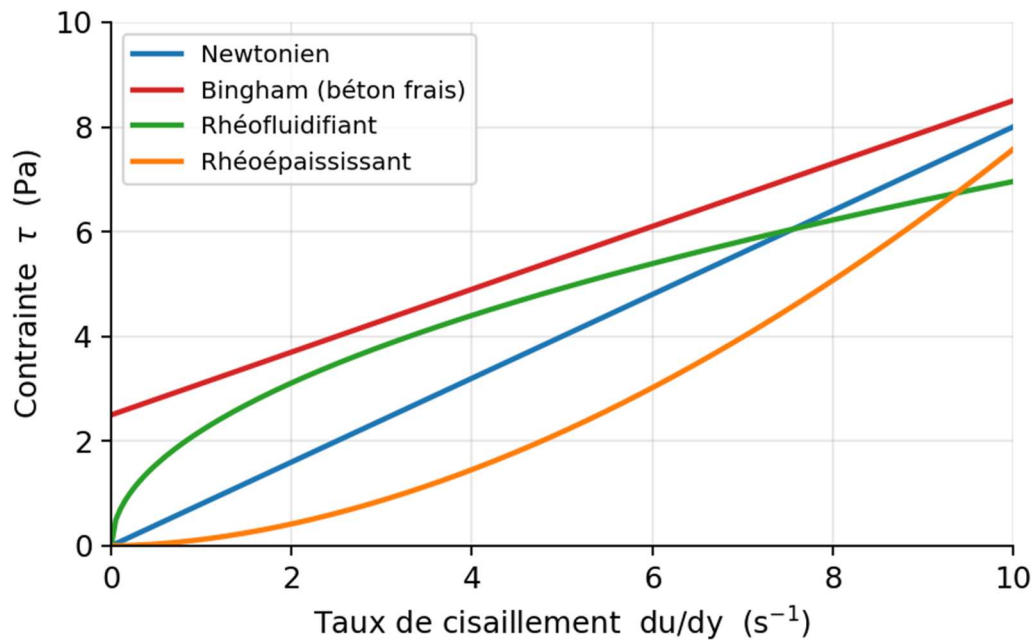
Viscosité cinématique de l'eau en fonction de la température.

1.5.3 Fluides newtoniens et non newtoniens

Un fluide est dit **newtonien** lorsque μ est indépendant du taux de déformation du/dy : la relation $\tau(du/dy)$ est linéaire et passe par l'origine. L'eau, l'air, les huiles minérales sont newtoniens.

Certains fluides du génie civil ne le sont pas :

- **fluides de Bingham** (béton frais, boues de forage, coulis) : ils ne s'écoulent qu'au-delà d'une contrainte seuil τ_0 : $\tau = \tau_0 + \mu_p du/dy$;
- **fluides pseudo-plastiques** (rhéofluidifiants) : la viscosité apparente diminue avec le taux de cisaillement (peintures, polymères) ;
- **fluides dilatants** (rhéoépaississants) : la viscosité apparente augmente avec le taux de cisaillement (suspensions concentrées de sable).



Rhéogrammes des principaux comportements : le fluide newtonien est une droite passant par l'origine ; le fluide de Bingham (béton frais) présente un seuil τ_0 .

Le **fluide parfait** est un modèle idéal de viscosité nulle ($\mu = 0$) : il n'oppose aucune résistance au cisaillement. Ce modèle, étudié au chapitre 4, donne d'excellents résultats loin des parois ; le chapitre 6 réintroduira les effets visqueux (fluides réels).

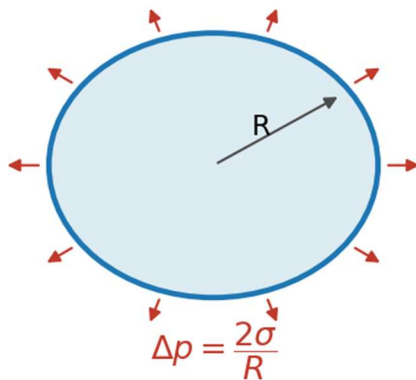
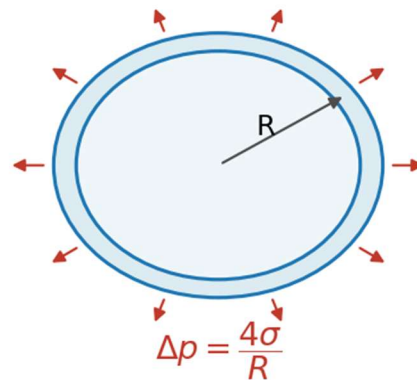
1.6 Tension superficielle et capillarité

1.6.1 Tension superficielle

À l'interface entre un liquide et un gaz (ou entre deux liquides non miscibles), les molécules de la surface ne sont pas entourées symétriquement : il en résulte une énergie de surface. Tout se passe comme si la surface libre était une membrane tendue, caractérisée par la **tension superficielle** σ :

$$\sigma = \frac{F}{L} \quad [\sigma] = N m^{-1}$$

Pour l'eau au contact de l'air à 20 °C : $\sigma = 0,073 N m^{-1}$; pour le mercure : $\sigma = 0,48 N m^{-1}$.

Goutte / bulle de gaz dans un liquide
(une seule interface)Bulle de savon dans l'air
(deux interfaces)

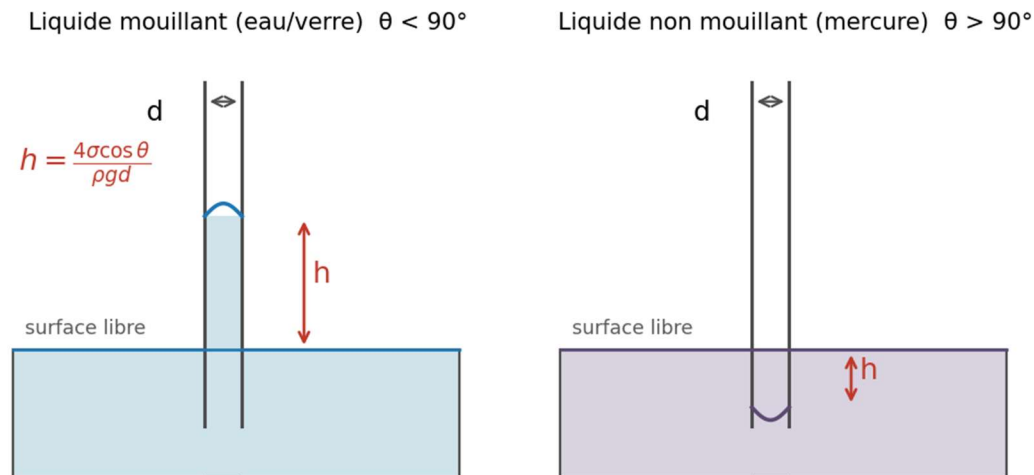
Surpression capillaire de Laplace : elle vaut $2\sigma/R$ pour une interface unique (goutte, bulle de gaz dans un liquide) et $4\sigma/R$ pour une bulle de savon, qui en possède deux.

La tension superficielle crée une surpression à l'intérieur d'une goutte ou d'une bulle (**loi de Laplace**) :

- goutte de rayon R (une interface) : $\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$
- bulle de savon (deux interfaces) : $\Delta p = \frac{4\sigma}{R}$

1.6.2 Capillarité : loi de Jurin

Lorsqu'un tube fin de rayon r est plongé dans un liquide, celui-ci monte (liquide mouillant, ex. eau/verre) ou descend (liquide non mouillant, ex. mercure/verre) dans le tube d'une hauteur h donnée par la **loi de Jurin** :



Capillarité dans un tube fin : le liquide mouillant monte (ménisque concave), le non mouillant descend. C'est le mécanisme des remontées capillaires dans les sols fins et les maçonneries.

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}$$

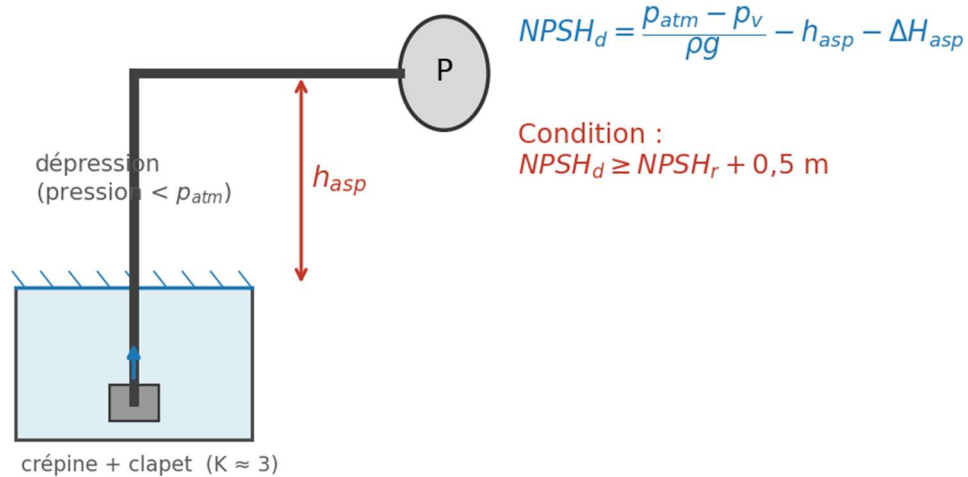
où θ est l'angle de contact (angle de raccordement) entre le liquide et la paroi ($\theta \approx 0$ pour l'eau sur verre propre ; $\theta \approx 130^\circ$ pour le mercure sur verre).

Conséquences pratiques en génie civil : remontées capillaires dans les sols fins et les maçonneries (pathologies d'humidité), nécessité d'un diamètre suffisant (≥ 10 mm) pour les tubes piézométriques afin d'éviter les erreurs de lecture d'origine capillaire.

1.7 Pression de vapeur saturante et cavitation

Tout liquide tend à se vaporiser. Dans une enceinte fermée, l'équilibre liquide-vapeur s'établit à la **pression de vapeur saturante** p_v , qui croît rapidement avec la température : pour l'eau, $p_v = 2,34$ kPa à 20°C et $p_v = 101,3$ kPa à 100°C (ébullition à pression atmosphérique).

Si, en un point d'un écoulement, la pression absolue descend au-dessous de p_v , le liquide se vaporise localement : des poches et bulles de vapeur apparaissent, puis implosent brutalement lorsqu'elles atteignent des zones de pression plus élevée. Ce phénomène, appelé **cavitation**, provoque bruit, vibrations et érosion rapide des matériaux. Il concerne directement l'ingénieur : aspiration des pompes, vannes, déversoirs et coursiers d'évacuateurs de crues, hélices.



Aspiration d'une pompe : la pression absolue à l'entrée diminue avec la hauteur d'aspiration et les pertes de charge. Le NPSH disponible doit rester supérieur au NPSH requis par la machine.

1.8 Exercices résolus

1.8.1 Exercice 1.1 — Masse volumique et densité

Un réservoir cylindrique de diamètre $D = 1,20 \text{ m}$ contient une hauteur $h = 0,90 \text{ m}$ d'huile. La masse d'huile est de 915 kg . Calculer le volume d'huile, sa masse volumique, son poids volumique et sa densité.

Solution.

Volume d'huile :

$$V = \frac{\pi D^2}{4} h = \frac{\pi \times 1,20^2}{4} \times 0,90 = 1,018 \text{ m}^3$$

Masse volumique :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{915}{1,018} = 899 \text{ kg m}^{-3}$$

Poids volumique :

$$\gamma = \rho g = 899 \times 9,81 = 8819 \text{ N m}^{-3} \approx 8,82 \text{ kN m}^{-3}$$

Densité (référence : eau) :

$$d = \frac{\rho}{\rho_e} = \frac{899}{1000} = 0,90$$

L'huile est plus légère que l'eau : elle flotterait à sa surface.

1.8.2 Exercice 1.2 — Compressibilité de l'eau

De l'eau occupe un volume $V = 1,000 \text{ m}^3$ à la pression atmosphérique. On la comprime jusqu'à 100 bar. Sachant que $E_v = 2,2 \times 10^9 \text{ Pa}$, calculer la diminution de volume et la masse volumique finale ($\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$).

Solution.

Variation de pression : $\Delta p = 100 \text{ bar} - 1 \text{ bar} \approx 99 \times 10^5 \text{ Pa} \approx 9,9 \times 10^6 \text{ Pa}$.

Par définition du module d'élasticité, pour une variation finie :

$$\Delta V = -\frac{V \Delta p}{E_v} = -\frac{1,000 \times 9,9 \times 10^6}{2,2 \times 10^9} = -4,5 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = -4,5 \text{ L}$$

Le volume ne diminue que de 0,45 % pour une pression de 100 bar : l'hypothèse d'incompressibilité est pleinement justifiée.

Masse volumique finale (la masse se conserve) :

$$\rho = \frac{m}{V + \Delta V} = \frac{1000}{0,9955} = 1004,5 \text{ kg m}^{-3}$$

1.8.3 Exercice 1.3 — Loi de Newton : plaque mobile

Une plaque plane de surface $A = 0,50 \text{ m}^2$ glisse à vitesse constante $U = 0,40 \text{ m/s}$ sur un film d'huile d'épaisseur $e = 0,8 \text{ mm}$ déposé sur un plan horizontal fixe. La viscosité dynamique de l'huile est $\mu = 0,15 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. La distribution de vitesse dans le film est supposée linéaire.

1. Calculer la contrainte de cisaillement sur la plaque. 2. Calculer la force de traction nécessaire. 3. Calculer la puissance dissipée.

Solution.

1. Distribution linéaire : le gradient de vitesse est constant :

$$\frac{du}{dy} = \frac{U}{e} = \frac{0,40}{0,8 \times 10^{-3}} = 500 \text{ s}^{-1}$$

Loi de Newton :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = 0,15 \times 500 = 75 \text{ Pa}$$

2. Force de traction (le fluide exerce sur la plaque une force résistante de même intensité) :

$$F = \tau A = 75 \times 0,50 = 37,5 \text{ N}$$

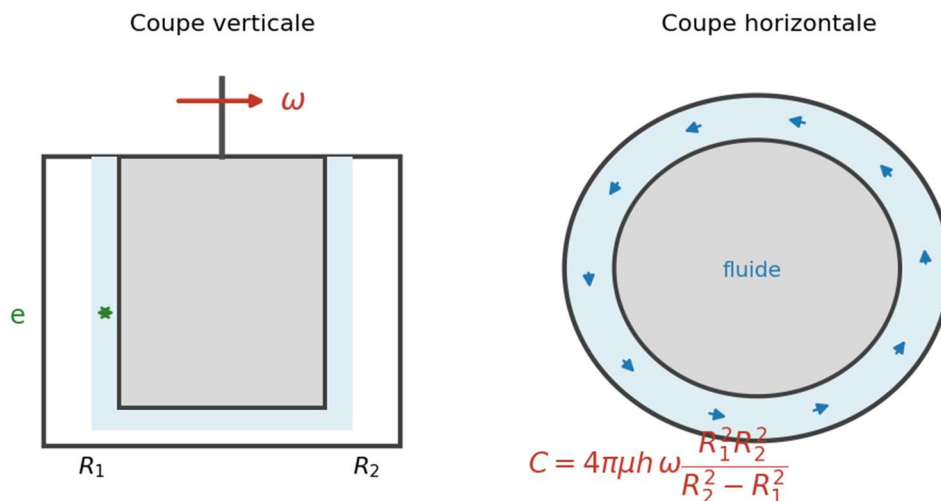
3. Puissance dissipée par frottement visqueux :

$$P = F U = 37,5 \times 0,40 = 15 \text{ W}$$

Cette puissance est intégralement transformée en chaleur dans le film d'huile.

1.8.4 Exercice 1.4 — Viscosimètre à cylindres coaxiaux

Un viscosimètre est constitué de deux cylindres coaxiaux. Le cylindre intérieur, de rayon $R_1 = 60 \text{ mm}$ et de hauteur $h = 200 \text{ mm}$, tourne à $N = 90 \text{ tr/min}$ à l'intérieur du cylindre extérieur fixe de rayon $R_2 = 62 \text{ mm}$. L'espace annulaire est rempli d'une huile. Le couple mesuré sur l'arbre est $C = 0,90 \text{ N}\cdot\text{m}$. En négligeant les effets de fond et en assimilant l'écoulement dans le mince espace annulaire à un écoulement de Couette plan, déterminer la viscosité dynamique de l'huile.



Viscosimètre à cylindres coaxiaux : le couple mesuré est proportionnel à la viscosité. Pour un entrefer mince, l'écoulement se ramène au Couette plan enroulé.

Solution.

Vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi \times 90}{60} = 9,42 \text{ rad s}^{-1}$$

Vitesse périphérique du cylindre intérieur :

$$U = \omega R_1 = 9,42 \times 0,060 = 0,565 \text{ m s}^{-1}$$

Épaisseur du film : $e = R_2 - R_1 = 2 \text{ mm} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$. Comme $e \ll R_1$, on assimile le profil de vitesse à un profil linéaire :

$$\tau = \mu \frac{U}{e}$$

Cette contrainte s'exerce sur la surface latérale $A = 2\pi R_1 h$ et le moment résultant par rapport à l'axe vaut :

$$C = \tau A R_1 = \mu \frac{U}{e} 2\pi R_1 h R_1 = \frac{2\pi \mu \omega R_1^3 h}{e}$$

D'où :

$$\mu = \frac{C e}{2\pi \omega R_1^3 h} = \frac{0,90 \times 2 \times 10^{-3}}{2\pi \times 9,42 \times (0,060)^3 \times 0,200} = 0,70 \text{ Pa s}$$

1.8.5 Exercice 1.5 — Ascension capillaire

1. Calculer la hauteur d'ascension capillaire de l'eau à 20 °C ($\sigma = 0,073 \text{ N/m}$, $\theta = 0$) dans un tube de verre propre de diamètre intérieur : a) 0,5 mm ; b) 5 mm. 2. Quel diamètre minimal faut-il donner à un tube piézométrique pour que l'erreur capillaire reste inférieure à 3 mm ?

Solution.

1. Loi de Jurin avec $r = D/2$:

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r} = \frac{4\sigma \cos\theta}{\rho g D}$$

a) $D = 0,5 \text{ mm}$:

$$h = \frac{4 \times 0,073 \times 1}{1000 \times 9,81 \times 0,5 \times 10^{-3}} = 0,0595 \text{ m} \approx 59,5 \text{ mm}$$

b) $D = 5 \text{ mm}$:

$$h = \frac{4 \times 0,073}{1000 \times 9,81 \times 5 \times 10^{-3}} = 5,95 \text{ mm}$$

L'ascension capillaire est inversement proportionnelle au diamètre.

2. On impose $h \leq 3 \text{ mm}$:

$$D \geq \frac{4\sigma}{\rho gh} = \frac{4 \times 0,073}{1000 \times 9,81 \times 3 \times 10^{-3}} = 9,9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Il faut donc $D \geq 10 \text{ mm}$ environ, ce qui justifie la règle pratique adoptée pour les piézomètres.

1.8.6 Exercice 1.6 — Surpression dans une gouttelette

Une gouttelette d'eau issue d'un asperseur a un diamètre de 0,20 mm. Calculer la surpression à l'intérieur de la gouttelette ($\sigma = 0,073 \text{ N/m}$).

Solution.

Loi de Laplace pour une goutte (une seule interface), avec $R = 0,10 \text{ mm}$:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2 \times 0,073}{0,10 \times 10^{-3}} = 1460 \text{ Pa} \approx 14,6 \text{ mbar}$$

La surpression devient considérable pour les très petites gouttes : c'est la tension superficielle qui maintient leur cohésion sphérique.

1.8.7 Exercice 1.7 — Gaz parfait

Une bouteille d'air comprimé de volume $V = 50 \text{ L}$ est à la pression absolue de 200 bar à 25 °C. Calculer la masse d'air contenue ($r = 287 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$). Quel volume occuperait cet air à la pression atmosphérique (1,013 bar) et à la même température ?

Solution.

Équation d'état : $p = \rho r T$, d'où :

$$\rho = \frac{p}{rT} = \frac{200 \times 10^5}{287 \times 298,15} = 233,7 \text{ kg m}^{-3}$$

Masse d'air :

$$m = \rho V = 233,7 \times 0,050 = 11,7 \text{ kg}$$

À pression atmosphérique et même température, à masse constante :

$$V_2 = V_1 \frac{p_1}{p_2} = 0,050 \times \frac{200}{1,013} = 9,87 \text{ m}^3$$

On mesure ici le contraste avec les liquides : le volume du gaz est multiplié par près de 200.

2 Statique des fluides (hydrostatique)

La statique des fluides étudie les fluides au repos. C'est le chapitre le plus directement utile à l'ingénieur en génie civil : calcul des poussées sur les barrages, les vannes, les murs de réservoirs, les batardeaux, étude des flottements et des sous-pressions.

2.1 Notion de pression

2.1.1 Définition

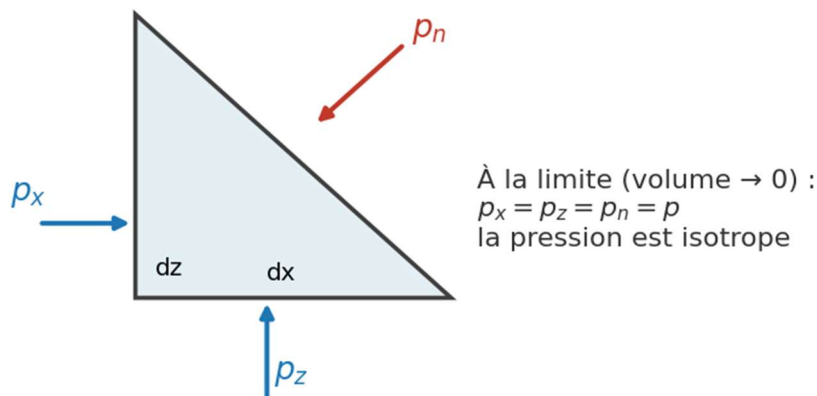
Dans un fluide au repos, il n'existe aucune contrainte de cisaillement. La seule contrainte transmissible à travers une surface est **normale** à cette surface : c'est la **pression**. Si dF est la force normale élémentaire s'exerçant sur un élément de surface dS :

$$p = \frac{dF}{dS} \quad [p] = Pa = N m^{-2}$$

Unités pratiques :

Unité	Équivalence
1 bar	10^5 Pa
1 atm	101 325 Pa = 1,013 bar
1 m de colonne d'eau (mCE)	9810 Pa $\approx$ 0,0981 bar
1 mm de mercure (torr)	133,3 Pa
1 psi	6895 Pa

2.1.2 Isotropie de la pression (théorème de Pascal)



Équilibre d'un prisme élémentaire : quand le volume tend vers zéro, les pressions sur les trois faces s'égalisent — la pression est un scalaire, indépendant de l'orientation de la facette.

En un point donné d'un fluide au repos, la pression est **identique dans toutes les directions** : elle ne dépend pas de l'orientation de l'élément de surface considéré. On le démontre en écrivant l'équilibre d'un petit prisme fluide et en faisant tendre ses dimensions vers zéro : les termes de volume (poids) deviennent négligeables devant les termes de surface, et l'équilibre impose l'égalité des pressions sur toutes les faces. La pression est donc une grandeur **scalaire** $p(x, y, z)$.

2.1.3 Pression absolue, pression relative

- La **pression absolue** p_{abs} est mesurée par rapport au vide parfait ; elle est toujours positive.
- La **pression relative** (ou effective, ou manométrique) est mesurée par rapport à la pression atmosphérique locale :

$$p_{rel} = p_{abs} - p_{atm}$$

Une pression relative négative est appelée **dépression** (ou vide partiel). La plupart des manomètres industriels mesurent des pressions relatives ; les calculs de cavitation exigent au contraire les pressions absolues.

2.2 Équation fondamentale de l'hydrostatique

2.2.1 Établissement

Considérons un fluide au repos dans le champ de pesanteur, l'axe z étant vertical ascendant. Isolons un cylindre élémentaire de fluide d'axe vertical, de section dS et de hauteur dz . Il est soumis :

- à la force de pression sur sa face inférieure : $p(z) dS$ (vers le haut) ;
- à la force de pression sur sa face supérieure : $p(z + dz) dS$ (vers le bas) ;
- à son poids : $\rho g dS dz$ (vers le bas).

L'équilibre vertical s'écrit : $p(z) dS - p(z + dz) dS - \rho g dS dz = 0$, soit :

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$$

La pression décroît quand l'altitude augmente. Dans les directions horizontales, on montre de même que $\partial p / \partial x = \partial p / \partial y = 0$: **les surfaces isobares sont des plans horizontaux** (dans un fluide homogène au repos, sans autre champ de force).

2.2.2 Cas du liquide incompressible

Pour ρ constant, l'intégration entre deux points 1 et 2 donne :

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) = \rho g(z_1 - z_2)$$

que l'on retient sous les deux formes équivalentes :

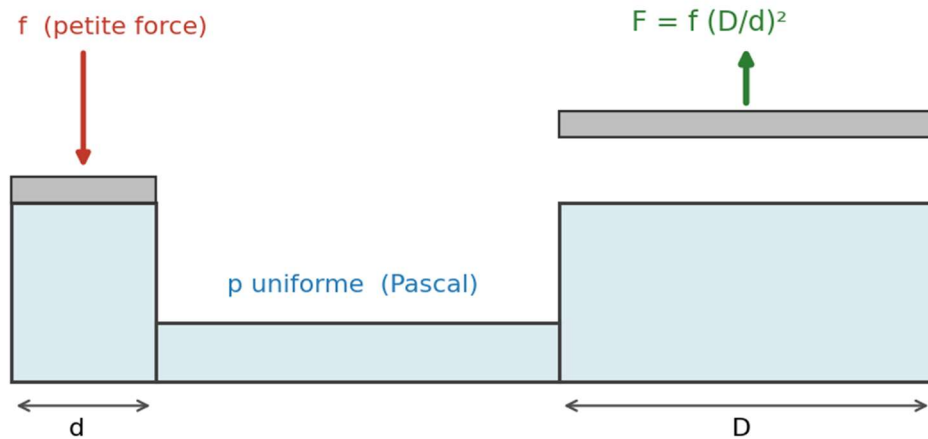
$$\boxed{p + \rho g z = \text{constante}} \quad \text{ou} \quad \boxed{p_A = p_B + \rho g h}$$

où A est situé à la profondeur h sous B . La quantité $z + \frac{p}{\rho g}$, homogène à une longueur, est la **charge piézométrique** (ou hauteur piézométrique) : elle est constante dans un liquide au repos.

Conséquences.

1. La pression croît linéairement avec la profondeur : à 10 m sous la surface libre de l'eau, la pression relative vaut $\rho g h = 1000 \times 9,81 \times 10 = 98,1 \text{ kPa} \approx 1 \text{ bar}$.
2. La pression ne dépend que de la profondeur, pas de la forme du récipient (**paradoxe de Pascal**) : des vases communicants présentent la même surface libre.

3. Toute variation de pression appliquée en un point d'un liquide confiné se transmet intégralement en tout point (**principe de Pascal**) : c'est le fondement de la presse hydraulique et des vérins.



Presse hydraulique : la pression se transmet intégralement, si bien qu'une force modeste sur le petit piston équilibre une force considérable sur le grand ; la course, elle, est divisée dans le même rapport.

2.2.3 Cas de l'atmosphère (fluide compressible)

Pour un gaz parfait isotherme, $\rho = p/(rT)$ et l'intégration de $dp/dz = -\rho g$ donne la loi exponentielle :

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{g z}{r T}\right)$$

Pour les ouvrages du génie civil (hauteurs de quelques dizaines de mètres), la variation de la pression atmosphérique est négligeable : on considère p_{atm} uniforme.

2.3 Mesure des pressions

2.3.1 Baromètre de Torricelli

Un tube rempli de mercure, retourné sur une cuve, laisse apparaître une colonne d'environ 760 mm surmontée d'un vide (pression de vapeur du mercure négligeable). L'équilibre donne :

$$p_{atm} = \rho_{Hg} g h = 13600 \times 9,81 \times 0,760 = 101,4 \text{ kPa}$$

2.3.2 Piézomètre

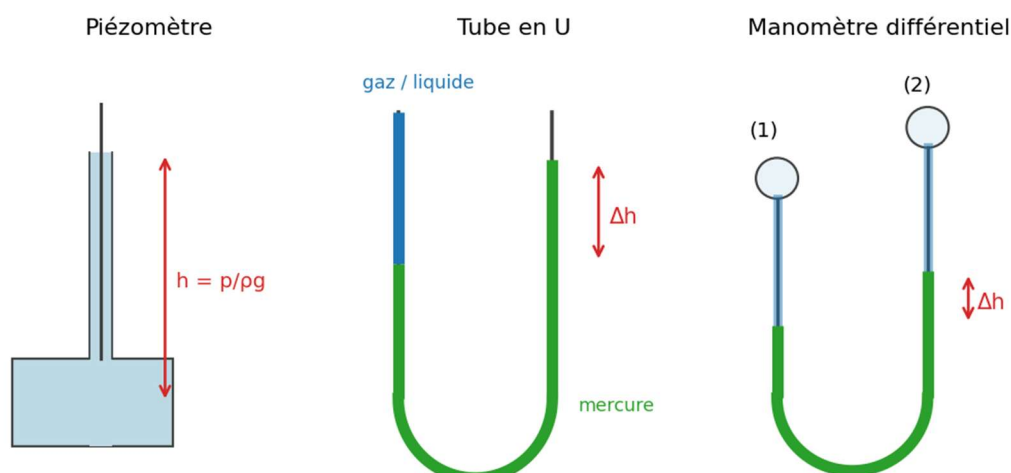
Simple tube vertical ouvert branché sur la conduite ou le réservoir : la hauteur h de liquide dans le tube donne directement la pression relative au point de branchement : $p = \rho gh$. Limité aux pressions modérées et aux liquides.

2.3.3 Manomètre en U

Un tube en U contenant un liquide manométrique (souvent du mercure) relie le point de mesure à l'atmosphère (manomètre simple) ou à un second point (manomètre différentiel). La règle de calcul est systématique :

On part d'une extrémité, on progresse de proche en proche : **on ajoute** ρgh quand on **descend** de h , **on retranche** ρgh quand on **monte**, en utilisant la masse volumique du fluide traversé, jusqu'à l'autre extrémité.

Pour un manomètre différentiel au mercure entre deux points A et B d'une même conduite d'eau horizontale, avec une dénivellation Δh du mercure :



Les trois appareils manométriques de base : le piézomètre (mesure directe en mètres de colonne d'eau), le tube en U à liquide lourd (fortes pressions) et le manomètre différentiel (écart entre deux points).

$$p_A - p_B = (\rho_{Hg} - \rho_e) g \Delta h$$

2.3.4 Manomètres industriels

Manomètre de Bourdon (tube élastique), capteurs à membrane et jauges, capteurs piézorésistifs : ils mesurent la pression relative ou absolue et sont utilisés sur les réseaux et en laboratoire.

2.4 Forces de pression sur des parois planes

2.4.1 Position du problème

Soit une paroi plane de surface S , inclinée d'un angle α sur l'horizontale, en contact sur une face avec un liquide au repos de poids volumique $\gamma = \rho g$. La surface libre est à pression atmosphérique ; on travaille en pressions relatives, ce qui revient à ne considérer que l'action du liquide (l'atmosphère agissant identiquement des deux côtés dans la plupart des cas).

La pression à la profondeur h vaut $p = \rho g h$. La force élémentaire sur dS est $dF = p dS$, normale à la paroi.

2.4.2 Intensité de la résultante

$$F = \int_S \rho g h dS = \rho g \sin \alpha \int_S y dS = \rho g \sin \alpha y_G S$$

où y est mesuré dans le plan de la paroi depuis la surface libre et y_G repère le centre de gravité G de la surface. Comme $h_G = y_G \sin \alpha$:

$$\boxed{F = \rho g h_G S = p_G S}$$

La résultante des forces de pression sur une paroi plane est égale au produit de la pression au centre de gravité de la paroi par l'aire de la paroi. Ce résultat vaut quelle que soit l'inclinaison.

2.4.3 Point d'application : centre de poussée

La résultante s'applique au **centre de poussée** C , situé **plus bas** que le centre de gravité (car la pression croît avec la profondeur). En prenant les moments par rapport à la trace de la surface libre :

$$y_C = \frac{\int_S y p dS}{F} = \frac{I_{xx}}{y_G S}$$

où I_{xx} est le moment d'inertie de la surface par rapport à la trace de la surface libre. Avec le théorème de Huygens ($I_{xx} = I_G + S y_G^2$) :

$$\boxed{y_C = y_G + \frac{I_G}{y_G S}}$$

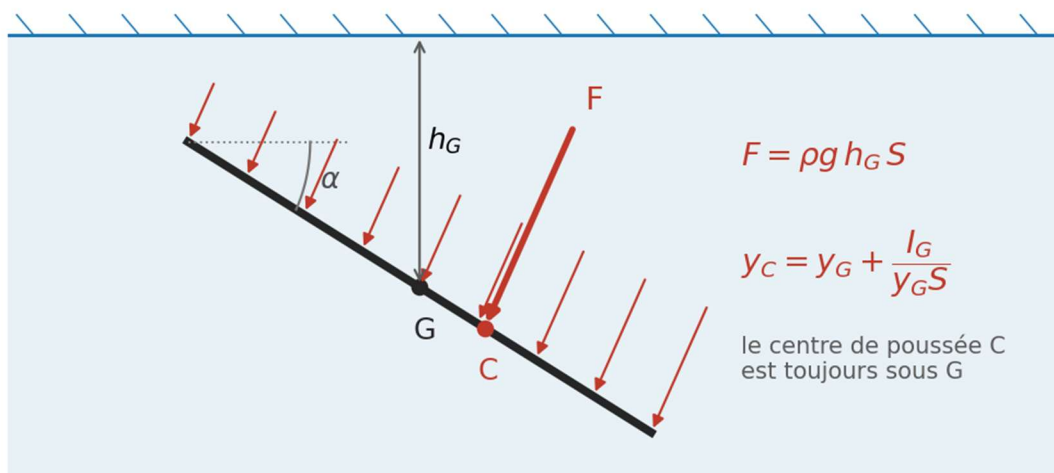
I_G étant le moment d'inertie de la paroi par rapport à l'axe horizontal passant par son centre de gravité. Moments d'inertie usuels :

Surface	I_G
Rectangle (base b , hauteur a , axe horizontal)	$ba^3/12$
Cercle de diamètre D	$\pi D^4/64$
Triangle (base b , hauteur a)	$ba^3/36$

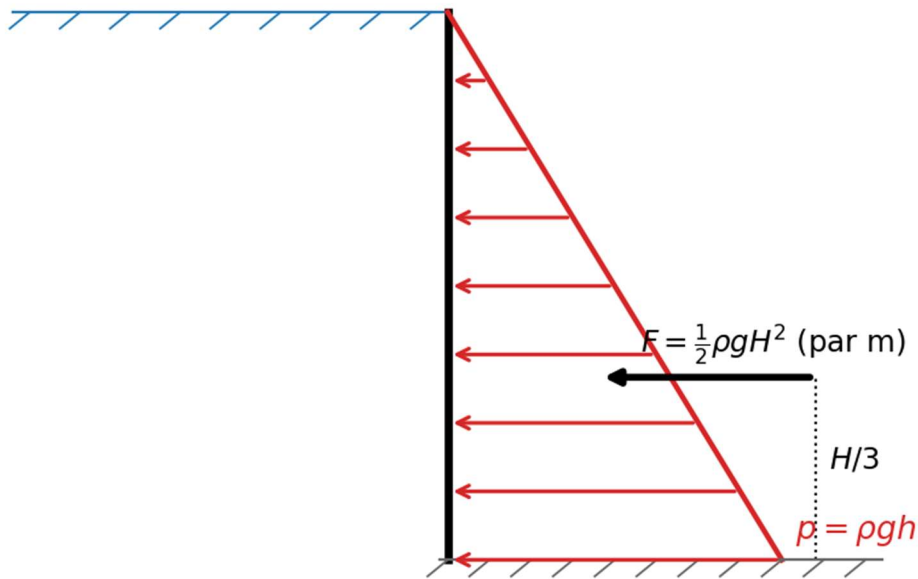
Cas particulier fondamental : paroi rectangulaire verticale de largeur b , mouillée sur une hauteur H (mur de réservoir, écran, batardeau) :

$$F = \rho g \frac{H}{2} (bH) = \frac{1}{2} \rho g b H^2$$

appliquée à $\frac{2H}{3}$ sous la surface libre (soit $H/3$ au-dessus du pied). Le diagramme des pressions est un triangle et la résultante passe par son centre de gravité.



Paroi plane inclinée : la poussée vaut $\rho g h_G S$ et s'applique au centre de poussée C, toujours situé sous le centre de gravité G de la paroi.



Répartition triangulaire des pressions sur une paroi verticale : la résultante F passe au tiers inférieur.

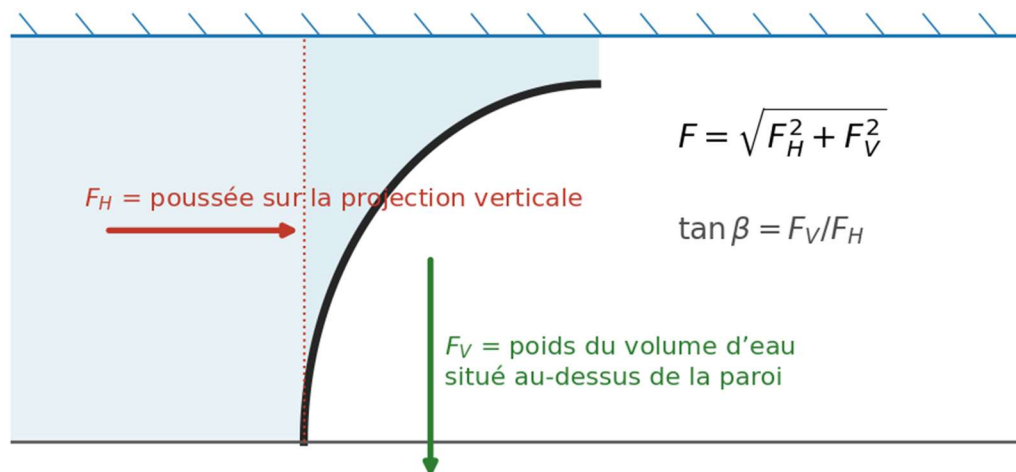
2.5 Forces de pression sur des parois courbes

Pour une paroi courbe (voûte, vanne secteur, conduite), la direction de dF varie ; on décompose la résultante :

Composante horizontale. F_H est égale à la poussée qui s'exercerait sur la **projection verticale** de la paroi :

$$F_H = \rho g h_G S'$$

où S' est l'aire projetée sur un plan vertical et h_G , la profondeur de son centre de gravité. Elle s'applique au centre de poussée de cette projection.



Paroi courbe : la composante horizontale se calcule sur la projection verticale de la paroi, la composante verticale est le poids du volume de liquide situé au-dessus (réel ou fictif).

Composante verticale. F_V est égale au **poids du volume de liquide** (réel ou fictif) compris entre la paroi et la surface libre :

$$F_V = \rho g V$$

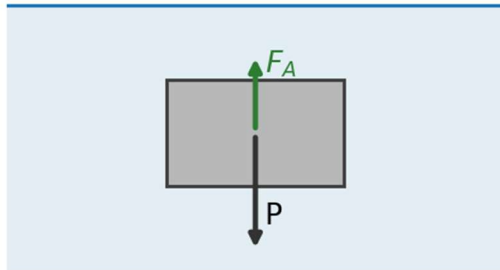
- dirigée **vers le bas** si le liquide est au-dessus de la paroi ;
- dirigée **vers le haut** (sous-pression) si le liquide est au-dessous : V est alors le volume *fictif* qui surmonterait la paroi jusqu'au niveau de la surface libre.

La ligne d'action de F_V passe par le centre de gravité du volume V . La résultante $F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$ passe, pour une paroi cylindrique circulaire, par l'axe du cylindre (toutes les forces élémentaires sont radiales).

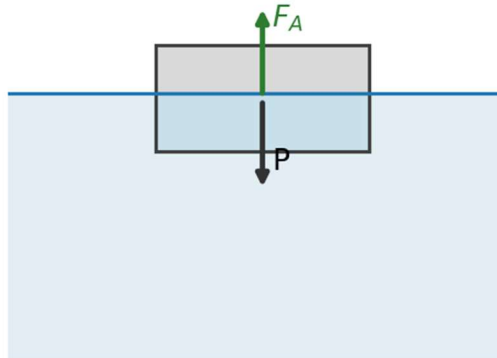
2.6 Poussée d'Archimède et flottabilité

2.6.1 Théorème d'Archimède

Corps immergé : $F_A = \rho_f g V$



Flottaison : $F_A = P$ (V_{imm} ajusté)



Poussée d'Archimède : pour un corps immergé elle vaut le poids du volume déplacé ; pour un corps flottant, le tirant d'eau s'ajuste jusqu'à équilibrer exactement le poids.

Tout corps immergé dans un fluide au repos subit de la part de celui-ci une poussée verticale, dirigée vers le haut, égale au poids du volume de fluide déplacé, appliquée au centre de gravité du volume déplacé (centre de carène C).

$$F_A = \rho_f g V_{imm}$$

Démonstration immédiate : remplaçons par la pensée le corps par le fluide ambiant ; ce volume fluide est en équilibre sous l'action de son poids et des forces de pression, lesquelles ne dépendent que de la géométrie : leur résultante est donc opposée au poids du fluide déplacé.

2.6.2 Équilibre des corps immergés et flottants

Pour un corps de poids P totalement immergé :

- $P > F_A$: le corps coule ;
- $P = F_A$: équilibre indifférent entre deux eaux ;
- $P < F_A$: le corps remonte et **flotte** ; à l'équilibre de flottaison, la poussée sur le volume immergé (la *carène*) équilibre exactement le poids : $\rho_f g V_{imm} = P$.

2.6.3 Stabilité — notion de métacentre

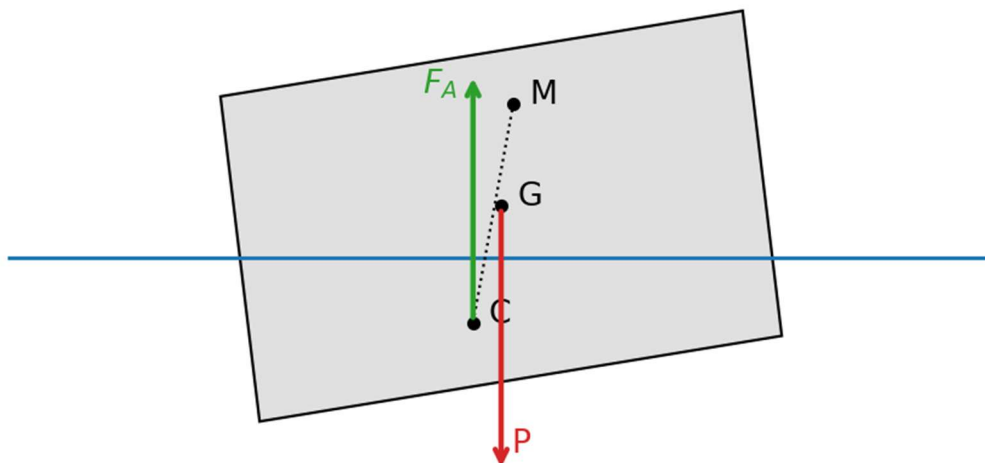
Un flotteur est en équilibre stable si, après une petite inclinaison, le couple poids–poussée le redresse. Pour de petites inclinaisons, la verticale passant par le nouveau centre de carène coupe l'axe de symétrie au **métacentre** M , situé à la distance :

$$\overline{CM} = \frac{I}{V_{imm}}$$

au-dessus du centre de carène C , où I est le moment d'inertie de la surface de flottaison par rapport à l'axe d'inclinaison. La condition de stabilité s'écrit :

$$\overline{GM} = \overline{CM} - \overline{CG} > 0$$

le métacentre doit être **au-dessus** du centre de gravité G . Cette notion gouverne la stabilité des caissons flottants, barges et pontons utilisés en travaux maritimes.



M au-dessus de G : couple de rappel $\rightarrow$ stable

Stabilité d'un flotteur incliné : le métacentre M , intersection de la verticale de poussée avec l'axe du flotteur, doit être au-dessus de G .

2.7 Exercices résolus

2.7.1 Exercice 2.1 — Pressions dans un réservoir

Un réservoir ouvert contient une couche d'huile ($d = 0,85$) de 2,00 m d'épaisseur surmontant une couche d'eau de 3,00 m. Calculer la pression relative : a) à l'interface

huile-eau ; b) au fond du réservoir. Exprimer ce dernier résultat en mètres de colonne d'eau et en bar.

Solution.

a) Interface (profondeur 2,00 m d'huile) :

$$p_1 = \rho_h g h_h = 850 \times 9,81 \times 2,00 = 16\,677 \text{ Pa} \approx 16,7 \text{ kPa}$$

b) Fond :

$$p_2 = p_1 + \rho_e g h_e = 16\,677 + 1000 \times 9,81 \times 3,00 = 46\,107 \text{ Pa} \approx 46,1 \text{ kPa}$$

En hauteur d'eau :

$$h = \frac{p_2}{\rho_e g} = \frac{46\,107}{9810} = 4,70 \text{ mCE}$$

En bar : $p_2 = 0,461 \text{ bar}$.

2.7.2 Exercice 2.2 — Manomètre différentiel au mercure

Deux conduites d'eau A et B sont reliées par un manomètre en U au mercure ($d = 13,6$). L'axe de B est situé 30 cm plus haut que celui de A. La branche du mercure côté A est 20 cm plus basse que le niveau côté B ($\Delta h = 0,20 \text{ m}$). Le point de raccordement côté A est 60 cm sous l'axe de A. Déterminer $p_A - p_B$.

Solution.

Notons M le niveau du mercure côté A et N celui côté B (N est 0,20 m au-dessus de M).

Cheminons de A vers B en comptant positivement les descentes :

$$p_A + \rho_e g(0,60) - \rho_{Hg} g(0,20) - \rho_e g(0,60 - 0,20 + 0,30) = p_B$$

En effet : on descend de 0,60 m dans l'eau jusqu'à M , on monte de 0,20 m dans le mercure jusqu'à N , puis on monte dans l'eau de N jusqu'à B, soit $0,40 + 0,30 = 0,70 \text{ m}$.

$$p_A - p_B = -\rho_e g(0,60) + \rho_{Hg} g(0,20) + \rho_e g(0,70)$$

$$p_A - p_B = 9810 (-0,60 + 0,70) + 13,6 \times 9810 \times 0,20$$

$$p_A - p_B = 981 + 26\,683 = 27\,664 \text{ Pa} \approx 27,7 \text{ kPa}$$

Remarque. On retrouve la structure générale : le terme dominant est $(\rho_{Hg} - \rho_e)g\Delta h$ corrigé de la dénivellation des axes.

2.7.3 Exercice 2.3 — Presse hydraulique

Une presse hydraulique comporte un petit piston de diamètre $d = 40 \text{ mm}$ et un grand piston de diamètre $D = 320 \text{ mm}$ situé au même niveau. Quelle force f faut-il exercer sur le petit piston pour soulever une charge de 60 kN posée sur le grand piston ? Quel est le déplacement du petit piston pour une montée de la charge de 10 mm ?

Solution.

Principe de Pascal : la pression est la même sous les deux pistons (même niveau) :

$$\frac{f}{\pi d^2/4} = \frac{F}{\pi D^2/4} \Rightarrow f = F \left(\frac{d}{D}\right)^2 = 60\,000 \times \left(\frac{40}{320}\right)^2 = 937,5 \text{ N}$$

Le rapport d'amplification vaut $(D/d)^2 = 64$.

Conservation du volume de liquide déplacé :

$$\frac{\pi d^2}{4} e = \frac{\pi D^2}{4} E \Rightarrow e = E \left(\frac{D}{d}\right)^2 = 10 \times 64 = 640 \text{ mm}$$

La force est divisée par 64, la course est multipliée par 64 : le travail se conserve (aux frottements près).

2.7.4 Exercice 2.4 — Poussée sur une vanne rectangulaire verticale

Une vanne rectangulaire verticale de largeur $b = 2,50 \text{ m}$ et de hauteur $a = 1,80 \text{ m}$ ferme l'extrémité d'un canal. Son arête supérieure est située à $1,20 \text{ m}$ sous la surface libre de l'eau. Calculer la poussée hydrostatique sur la vanne et la position de son point d'application.

Solution.

Profondeur du centre de gravité de la vanne :

$$h_G = 1,20 + \frac{1,80}{2} = 2,10 \text{ m}$$

Poussée :

$$F = \rho g h_G S = 1000 \times 9,81 \times 2,10 \times (2,50 \times 1,80) = 92\,704 \text{ N} \approx 92,7 \text{ kN}$$

Centre de poussée (paroi verticale : $y \equiv h$) :

$$h_C = h_G + \frac{I_G}{h_G S} = 2,10 + \frac{2,50 \times 1,80^3/12}{2,10 \times 4,50} = 2,10 + \frac{1,215}{9,45} = 2,229 \text{ m}$$

Le centre de poussée est à 2,23 m sous la surface libre, soit 12,9 cm sous le centre de la vanne. C'est en ce point qu'il faut considérer la résultante pour le calcul des organes de manœuvre et des appuis.

2.7.5 Exercice 2.5 — Mur de réservoir : diagramme des pressions

Un mur vertical de 4,00 m de hauteur retient de l'eau sur une hauteur $H = 3,50$ m. Pour une tranche de 1,00 m de largeur : a) tracer le diagramme des pressions ; b) calculer la poussée résultante et son point d'application ; c) calculer le moment de renversement par rapport au pied du mur.

Solution.

a) La pression relative croît linéairement de 0 à la surface à $p_{max} = \rho g H = 9810 \times 3,50 = 34\,335$ Pa au pied : diagramme triangulaire.

b) Poussée (aire du diagramme $\times$ largeur) :

$$F = \frac{1}{2} \rho g H^2 b = \frac{1}{2} \times 9810 \times 3,50^2 \times 1,00 = 60\,086 \text{ N} \approx 60,1 \text{ kN}$$

Point d'application : au tiers de la hauteur mouillée depuis le pied :

$$z_c = \frac{H}{3} = 1,167 \text{ m}$$

c) Moment de renversement au pied :

$$M = F \times \frac{H}{3} = 60\,086 \times 1,167 = 70\,100 \text{ N m} \approx 70,1 \text{ kN m}$$

Ce moment doit être équilibré par le poids propre du mur (et sa fondation) avec un coefficient de sécurité convenable : c'est le point de départ du dimensionnement des murs poids.

2.7.6 Exercice 2.6 — Vanne circulaire inclinée

Une vanne circulaire de diamètre $D = 1,20$ m est située dans une paroi inclinée à $\alpha = 60^\circ$ sur l'horizontale. Son centre est à $h_G = 2,40$ m sous la surface libre. Calculer la poussée et la distance, mesurée le long de la paroi, entre le centre de la vanne et le centre de poussée.

Solution.

Poussée :

$$F = \rho g h_G S = 9810 \times 2,40 \times \frac{\pi \times 1,20^2}{4} = 9810 \times 2,40 \times 1,131 = 26\,628 \text{ N} \approx 26,6 \text{ kN}$$

Position le long de la paroi : $y_G = h_G / \sin \alpha = 2,40 / 0,866 = 2,771 \text{ m}$.

$$y_C - y_G = \frac{I_G}{y_G S} = \frac{\pi D^4 / 64}{y_G S} = \frac{\pi \times 1,20^4 / 64}{2,771 \times 1,131} = \frac{0,1018}{3,134} = 0,0325 \text{ m}$$

Le centre de poussée est à 3,25 cm sous le centre de la vanne, mesuré le long de la paroi. On note que l'écart $y_C - y_G$ diminue quand la profondeur augmente : en très grande profondeur, la pression devient quasi uniforme et C tend vers G .

2.7.7 Exercice 2.7 — Paroi courbe : vanne quart de cylindre

Une vanne en quart de cylindre de rayon $R = 2,00 \text{ m}$ et de largeur $b = 3,00 \text{ m}$ retient de l'eau. La surface libre affleure la génératrice supérieure ; l'eau est située du côté concave, au-dessus de la vanne (le quart de cylindre relie la surface libre au radier horizontal). Calculer les composantes horizontale et verticale de la poussée, la résultante et son inclinaison.

Solution.

Composante horizontale. Projection verticale : rectangle $R \times b = 2,00 \times 3,00 \text{ m}^2$, centre de gravité à $R/2 = 1,00 \text{ m}$:

$$F_H = \rho g \frac{R}{2} (Rb) = \frac{1}{2} \rho g R^2 b = \frac{1}{2} \times 9810 \times 4,00 \times 3,00 = 58\,860 \text{ N} \approx 58,9 \text{ kN}$$

appliquée à $2R/3 = 1,333 \text{ m}$ sous la surface libre.

Composante verticale. Volume d'eau réel au-dessus de la vanne : volume compris entre le quart de cylindre et la surface libre, soit (aire du carré – aire du quart de cercle) $\times$ largeur :

$$V = \left(R^2 - \frac{\pi R^2}{4} \right) b = R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) b = 4,00 \times 0,2146 \times 3,00 = 2,575 \text{ m}^3$$

$$F_V = \rho g V = 9810 \times 2,575 = 25\,261 \text{ N} \approx 25,3 \text{ kN} \quad (\text{vers le bas})$$

Résultante :

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = \sqrt{58,9^2 + 25,3^2} = 64,1 \text{ kN}$$

$$\tan \beta = \frac{F_V}{F_H} = \frac{25,3}{58,9} = 0,429 \Rightarrow \beta = 23,2^\circ \text{ sous l'horizontale}$$

La résultante passe par l'axe du cylindre, toutes les forces élémentaires étant radiales.

2.7.8 Exercice 2.8 — Poussée d'Archimède : densimètre et caisson

1. Un bloc de béton de volume $0,80 \text{ m}^3$ et de masse volumique 2400 kg/m^3 est entièrement immergé dans l'eau, suspendu à un câble. Calculer la tension du câble. 2. Un caisson parallélépipédique en béton armé de $6,00 \text{ m} \times 4,00 \text{ m} \times 3,00 \text{ m}$ (hauteur) pèse 500 kN . Vérifier qu'il flotte en eau de mer ($\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$) et calculer son tirant d'eau.

Solution.

1. Poids du bloc : $P = 2400 \times 9,81 \times 0,80 = 18\,835 \text{ N}$. Poussée d'Archimède : $F_A = 1000 \times 9,81 \times 0,80 = 7848 \text{ N}$. Tension du câble :

$$T = P - F_A = 18\,835 - 7848 = 10\,987 \text{ N} \approx 11,0 \text{ kN}$$

Le poids apparent dans l'eau est réduit d'environ 42 % — donnée essentielle pour les manutentions immergées.

2. Poussée maximale disponible (immersion totale) :

$$F_{A,max} = 1025 \times 9,81 \times (6 \times 4 \times 3) = 723\,978 \text{ N} \approx 724 \text{ kN} > 500 \text{ kN}$$

Le caisson flotte. Tirant d'eau T_e tel que la poussée équilibre le poids :

$$\rho g(6 \times 4 \times T_e) = 500\,000 \Rightarrow T_e = \frac{500\,000}{1025 \times 9,81 \times 24} = 2,07 \text{ m}$$

Le franc-bord vaut $3,00 - 2,07 = 0,93 \text{ m}$.

2.7.9 Exercice 2.9 — Stabilité d'un caisson flottant

Pour le caisson de l'exercice précédent ($6,00 \text{ m} \times 4,00 \text{ m} \times 3,00 \text{ m}$, tirant d'eau $2,07 \text{ m}$), le centre de gravité est à $1,40 \text{ m}$ au-dessus du fond. Étudier la stabilité au roulis (inclinaison autour de l'axe longitudinal).

Solution.

Centre de carène C : centre du volume immergé, à $2,07/2 = 1,035 \text{ m}$ au-dessus du fond.

Moment d'inertie de la surface de flottaison (rectangle $6,00 \times 4,00 \text{ m}$) par rapport à l'axe longitudinal (la largeur $4,00 \text{ m}$ intervient au cube) :

$$I = \frac{6,00 \times 4,00^3}{12} = 32,0 \text{ m}^4$$

Volume immergé : $V = 6 \times 4 \times 2,07 = 49,7 \text{ m}^3$.

Rayon métacentrique :

$$\overline{CM} = \frac{I}{V} = \frac{32,0}{49,7} = 0,644 \text{ m}$$

Position du métacentre au-dessus du fond : $z_M = 1,035 + 0,644 = 1,679 \text{ m}$.

Hauteur métacentrique :

$$\overline{GM} = z_M - z_G = 1,679 - 1,40 = 0,28 \text{ m} > 0$$

Le caisson est **stable** au roulis, avec une marge modérée ($\overline{GM}$ de l'ordre de 0,3 m) ; en pratique on vérifierait aussi l'effet des surfaces libres internes (ballasts) qui réduisent la stabilité.

3 Cinématique des fluides

La cinématique décrit le mouvement des fluides sans se préoccuper des forces qui le provoquent. Elle fournit le vocabulaire (lignes de courant, débit) et l'outil central de tout calcul hydraulique : l'équation de continuité.

3.1 Description du mouvement

3.1.1 Description lagrangienne

On suit chaque particule fluide dans son mouvement, comme en mécanique du point : la position $\vec{r}(t)$ d'une particule identifiée par sa position initiale $\vec{r}_0$ est la fonction inconnue. Cette description, naturelle mais lourde (il faudrait suivre une infinité de particules), est peu utilisée en hydraulique.

3.1.2 Description eulérienne

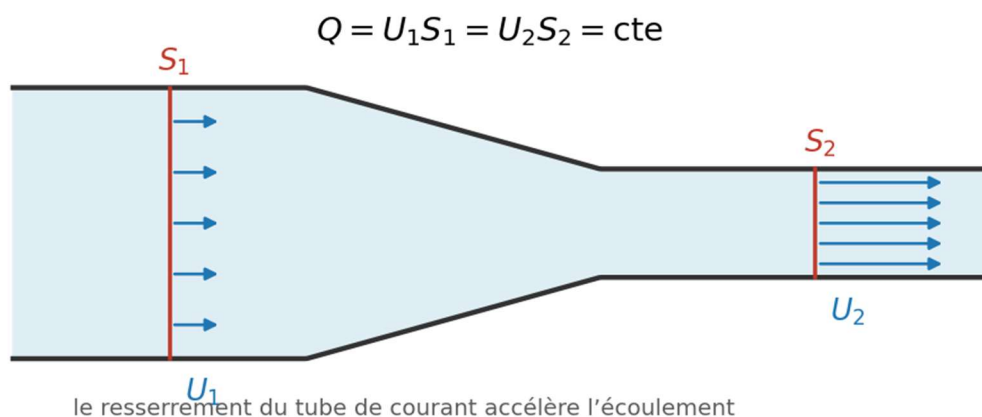
On se place en des points **fixes** de l'espace et on observe les particules qui y défilent : le champ de vitesse $\vec{V}(x, y, z, t)$ est la fonction inconnue. C'est la description adoptée en mécanique des fluides — c'est celle du limnimètre ou du moulinet placé en un point d'une rivière.

3.1.3 Trajectoires, lignes de courant, lignes d'émission

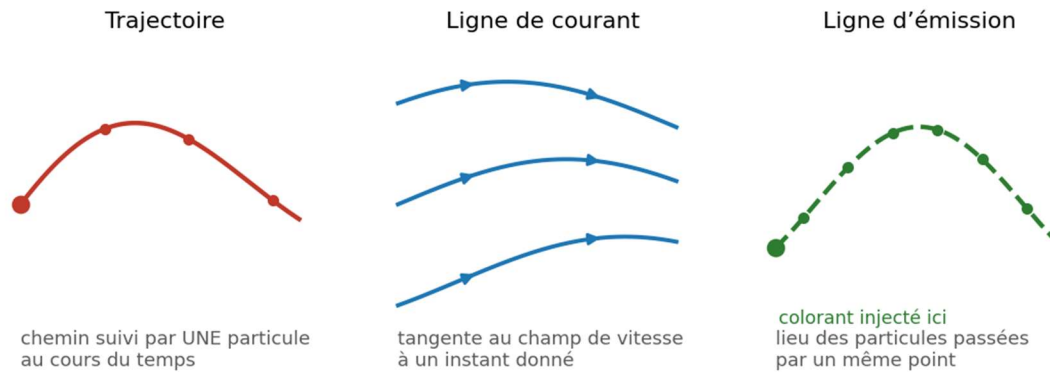
- **Trajectoire** : chemin décrit par une particule donnée au cours du temps (photo en pose longue d'un flotteur).
- **Ligne de courant** : courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse à un instant donné (photographie instantanée du champ de vitesse). Son équation en 2D : $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$.
- **Ligne d'émission** : lieu, à un instant donné, des particules passées par un même point (filet de colorant injecté en un point).

En **régime permanent**, ces trois familles de courbes sont confondues.

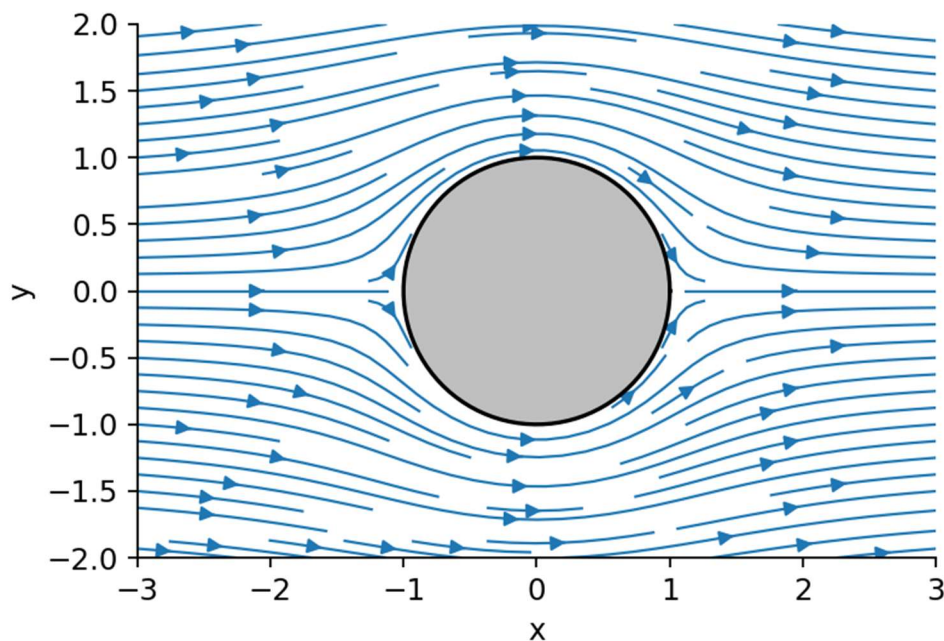
Un **tube de courant** est la surface engendrée par les lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé ; le fluide ne traverse pas sa paroi latérale — un tube de courant se comporte comme une conduite virtuelle.



Tube de courant et conservation du débit : lorsque la section se resserre, la vitesse augmente dans le même rapport.



Trajectoire, ligne de courant et ligne d'émission : trois notions distinctes, qui coïncident uniquement en régime permanent.



Lignes de courant de l'écoulement (potentiel) autour d'un cylindre : elles matérialisent la direction locale de la vitesse ; leur resserrement traduit une accélération.

3.1.4 Classification des écoulements

- **Permanent (stationnaire)** : les grandeurs ne dépendent pas du temps en chaque point : $\partial / \partial t = 0$. Exemple : conduite alimentée par un réservoir à niveau constant. **Non permanent (transitoire)** : remplissage d'un réservoir, coup de bélier, onde de crue.
- **Uniforme** : la vitesse est la même en tout point d'une même section le long de l'écoulement ($\partial \vec{V} / \partial s = 0$) : canal prismatique à profondeur constante. **Non uniforme (varié)** : convergent, élargissement.

- **Mono-, bi-, tridimensionnel** selon le nombre de coordonnées nécessaires.
L'hydraulique des conduites et des canaux utilise massivement le modèle **unidimensionnel** : on raisonne sur la vitesse moyenne dans la section.

3.1.5 Accélération d'une particule fluide

En description eulérienne, l'accélération d'une particule s'obtient par la **dérivée particulaire** :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}}_{\text{accélération convective}}$$

Même en régime permanent (accélération locale nulle), une particule peut accélérer en se déplaçant vers des zones de vitesse différente (accélération convective) : c'est le cas dans un convergent.

En coordonnées cartésiennes, pour la composante u :

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

3.2 Débits et vitesse moyenne

3.2.1 Débit volumique

Le **débit volumique** Q à travers une surface S est le volume de fluide qui la traverse par unité de temps :

$$Q = \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS \quad [Q] = \text{m}^3 \text{s}^{-1}$$

Unités pratiques : L/s (réseaux de distribution), m³/h (pompes), m³/s (rivières, ouvrages).

3.2.2 Débit massique

$$Q_m = \rho Q \quad [Q_m] = \text{kg s}^{-1}$$

3.2.3 Vitesse moyenne

La **vitesse moyenne** (ou vitesse débitante) dans une section droite S est définie par :

$$U = \frac{Q}{S}$$

C'est elle qu'utilise le modèle unidimensionnel. Ordres de grandeur usuels en génie civil : 0,5 à 1,5 m/s dans les réseaux d'eau potable ; 0,6 à 3 m/s en assainissement ; 1 à 5 m/s dans les galeries et conduites forcées.

3.3 Équation de continuité

3.3.1 Principe

L'équation de continuité exprime la **conservation de la masse** : la masse ne se crée ni ne se détruit dans l'écoulement.

3.3.2 Forme locale

Le bilan de masse sur un volume élémentaire fixe conduit à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

Pour un fluide **incompressible** (ρ constant), qu'il soit permanent ou non :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Le champ de vitesse d'un fluide incompressible est à divergence nulle (champ conservatif) : ce critère permet de vérifier si un champ de vitesse proposé est physiquement admissible.

3.3.3 Forme intégrale : conservation du débit

Pour un écoulement **permanent** dans un tube de courant (ou une conduite) entre deux sections 1 et 2, aucun flux ne traversant la paroi latérale :

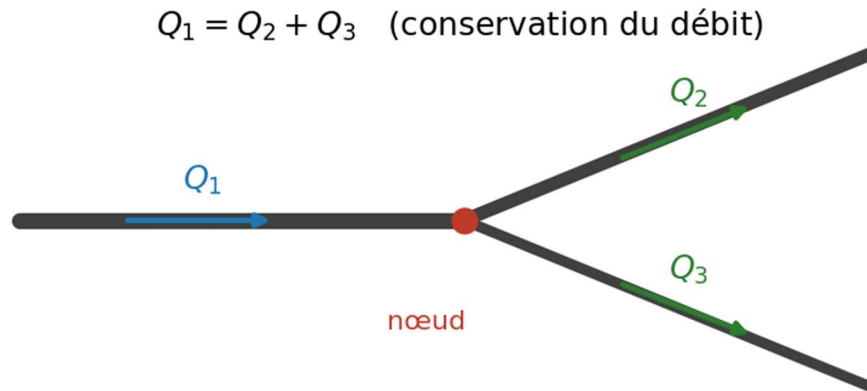
$$\rho_1 U_1 S_1 = \rho_2 U_2 S_2 \quad (\text{conservation du débit massique})$$

Pour un fluide incompressible :

$$Q = U_1 S_1 = U_2 S_2 = \text{constante}$$

Conséquence fondamentale : dans une conduite, la vitesse varie en raison inverse de la section. Pour une conduite circulaire, $U = \frac{4Q}{\pi D^2}$: à débit donné, diviser le diamètre par 2 multiplie la vitesse par 4.

Nœuds de réseaux. À un nœud où confluent plusieurs conduites, la conservation de la masse impose (loi des nœuds) :



Loi des nœuds : la somme des débits entrants égale la somme des débits sortants — base du calcul des réseaux maillés.

$$\sum Q_{\text{entrant}} = \sum Q_{\text{sortant}}$$

3.4 Notions complémentaires

3.4.1 Rotation et déformation — écoulements rotationnels et irrotationnels

Le mouvement local d'une particule fluide se décompose en une translation, une rotation en bloc et une déformation. Le **vecteur tourbillon** caractérise la rotation :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot} \vec{V}$$

Un écoulement est **irrotationnel** lorsque $\overrightarrow{rot} \vec{V} = \vec{0}$ partout : il dérive alors d'un potentiel des vitesses φ tel que $\vec{V} = \vec{\nabla} \varphi$. Les écoulements de fluides parfaits issus du repos sont irrotationnels ; la rotationnalité naît essentiellement de la viscosité, au voisinage des parois (couches limites) et dans les sillages.

3.4.2 Fonction de courant (écoulement plan incompressible)

Pour un écoulement plan incompressible, on définit la **fonction de courant** $\psi(x, y)$ par :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La continuité est alors automatiquement satisfaite. Les courbes $\psi = \text{constante}$ sont les **lignes de courant**, et le débit (par unité de largeur) entre deux lignes de courant vaut $q = \psi_2 - \psi_1$.

3.5 Exercices résolus

3.5.1 Exercice 3.1 — Vitesse moyenne et continuité dans une conduite

De l'eau circule avec un débit $Q = 40 \text{ L/s}$ dans une conduite dont le diamètre passe de $D_1 = 200 \text{ mm}$ à $D_2 = 125 \text{ mm}$. Calculer les vitesses moyennes dans les deux tronçons.

Solution.

$$Q = 0,040 \text{ m}^3/\text{s}.$$

$$U_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0,040}{\pi \times 0,200^2} = 1,27 \text{ m s}^{-1}$$

$$U_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 0,040}{\pi \times 0,125^2} = 3,26 \text{ m s}^{-1}$$

Vérification par la continuité : $U_2 = U_1(D_1/D_2)^2 = 1,27 \times (200/125)^2 = 1,27 \times 2,56 = 3,26 \text{ m/s}$. La vitesse dans le tronçon réduit dépasse la plage recommandée : le dimensionnement serait à revoir dans un projet réel.

3.5.2 Exercice 3.2 — Nœud de réseau

À un nœud d'un réseau de distribution arrivent une conduite 1 ($D_1 = 300 \text{ mm}$, $U_1 = 1,20 \text{ m/s}$) et une conduite 2 ($D_2 = 150 \text{ mm}$, $U_2 = 0,90 \text{ m/s}$). Le nœud alimente une conduite 3 ($D_3 = 250 \text{ mm}$) et un branchement 4 qui soutire 12 L/s . Calculer le débit et la vitesse dans la conduite 3.

Solution.

Débits entrants :

$$Q_1 = U_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = 1,20 \times \frac{\pi \times 0,300^2}{4} = 0,0848 \text{ m}^3/\text{s} = 84,8 \text{ L/s}$$

$$Q_2 = 0,90 \times \frac{\pi \times 0,150^2}{4} = 0,0159 \text{ m}^3/\text{s} = 15,9 \text{ L/s}$$

Loi des nœuds :

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 - Q_4 = 84,8 + 15,9 - 12,0 = 88,7 \text{ L/s}$$

Vitesse dans la conduite 3 :

$$U_3 = \frac{4Q_3}{\pi D_3^2} = \frac{4 \times 0,0887}{\pi \times 0,250^2} = 1,81 \text{ m s}^{-1}$$

3.5.3 Exercice 3.3 — Champ de vitesse admissible

Le champ de vitesse plan $u = 3x + 2y$, $v = ax - 3y$ (unités SI) est proposé pour un écoulement incompressible. 1. Déterminer si ce champ est admissible et, le cas échéant, la valeur de a pour qu'il soit de plus irrotationnel. 2. Le champ $u = 3x$, $v = -3y$ est-il incompressible ? irrotationnel ? Déterminer sa fonction de courant et l'allure des lignes de courant.

Solution.

1. Incompressibilité :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 3 + (-3) = 0$$

Le champ est incompressible **quel que soit** a . Irrotationnalité (composante du rotationnel en plan) :

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

2. Pour $u = 3x$, $v = -3y$: $\operatorname{div} \vec{V} = 3 - 3 = 0$ (incompressible) ; $\omega_z = 0 - 0 = 0$ (irrotationnel).

Fonction de courant : $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u = 3x \Rightarrow \psi = 3xy + f(x)$; puis $-\frac{\partial \psi}{\partial x} = v = -3y \Rightarrow -3y - f'(x) = -3y \Rightarrow f' = 0$.

$$\psi = 3xy + C$$

Les lignes de courant $xy = \text{constante}$ sont des **hyperboles équilatères** : c'est l'écoulement plan autour d'un point d'arrêt (impact d'un jet plan sur une plaque, écoulement dans un angle droit).

3.5.4 Exercice 3.4 — Accélération convective dans un convergent

Dans un convergent de longueur $L = 0,50 \text{ m}$, la vitesse (unidimensionnelle, régime permanent) croît linéairement de $U_1 = 2 \text{ m/s}$ à $U_2 = 8 \text{ m/s}$: $u(x) = U_1 + (U_2 - U_1) \frac{x}{L}$. Calculer l'accélération d'une particule à l'entrée, au milieu et à la sortie du convergent.

Solution.

Régime permanent : $\partial u / \partial t = 0$. L'accélération se réduit au terme convectif :

$$a_x = u \frac{du}{dx} \quad \text{avec} \quad \frac{du}{dx} = \frac{U_2 - U_1}{L} = \frac{6}{0,50} = 12 \text{ s}^{-1}$$

- Entrée ($u = 2 \text{ m/s}$) : $a_x = 2 \times 12 = 24 \text{ m s}^{-2}$
- Milieu ($u = 5 \text{ m/s}$) : $a_x = 5 \times 12 = 60 \text{ m s}^{-2}$
- Sortie ($u = 8 \text{ m/s}$) : $a_x = 8 \times 12 = 96 \text{ m s}^{-2}$

Bien que l'écoulement soit permanent, l'accélération atteint près de 10 g à la sortie : l'accélération convective n'est jamais négligeable dans les changements de section.

3.5.5 Exercice 3.5 — Remplissage d'un réservoir (régime non permanent)

Un réservoir cylindrique de diamètre $D = 3,00 \text{ m}$ est alimenté par un débit constant $Q_e = 25 \text{ L/s}$ et vidangé par un débit $Q_s = 10 \text{ L/s}$. 1. À quelle vitesse le niveau monte-t-il ? 2. Combien de temps faut-il pour élever le niveau de 1,50 m ?

Solution.

1. Bilan de volume (fluide incompressible) sur le réservoir :

$$S \frac{dh}{dt} = Q_e - Q_s$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_e - Q_s}{S} = \frac{0,015}{\pi \times 3,00^2 / 4} = \frac{0,015}{7,069} = 2,12 \times 10^{-3} \text{ m/s} = 2,12 \text{ mm/s}$$

2. Débits constants $\Rightarrow$ montée linéaire :

$$t = \frac{\Delta h}{dh/dt} = \frac{1,50}{2,12 \times 10^{-3}} = 707 \text{ s} \approx 11,8 \text{ min}$$

3.5.6 Exercice 3.6 — Conduite à débit réparti (irrigation)

Une rampe d'irrigation horizontale de diamètre $D = 100 \text{ mm}$ et de longueur $L = 60 \text{ m}$ distribue uniformément un débit linéique $q = 0,5 \text{ L/s}$ par mètre. Le débit entrant est $Q_0 = 30 \text{ L/s}$ (tout le débit est distribué). Exprimer le débit $Q(x)$ et la vitesse moyenne $U(x)$ le long de la rampe et calculer leurs valeurs à $x = 0, 30 \text{ m}$ et 60 m .

Solution.

Conservation de la masse entre l'entrée et l'abscisse x :

$$Q(x) = Q_0 - q x = 30 - 0,5 x \quad (L/s, x \text{ en } m)$$

Section : $S = \pi D^2/4 = 7,854 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. D'où :

$$U(x) = \frac{Q(x)}{S}$$

$x \text{ (m)}$	$Q \text{ (L/s)}$	$U \text{ (m/s)}$
0	30,0	3,82
30	15,0	1,91
60	0,0	0,00

Le débit et la vitesse décroissent linéairement jusqu'à s'annuler à l'extrémité aval. Ce schéma de « conduite à service en route » est le modèle de base des rampes d'irrigation et des conduites de distribution.

4 Dynamique des fluides parfaits — Théorème de Bernoulli

Ce chapitre relie les causes (forces de pression, pesanteur) au mouvement du fluide, dans le cadre du modèle du **fluide parfait** (viscosité nulle). Il aboutit au théorème de Bernoulli, outil central de l'hydraulique, et à ses applications : mesure de vitesse et de débit, vidange de réservoirs.

4.1 Équations d'Euler

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à une particule de fluide parfait. Les forces en présence sont les forces de pression et la pesanteur. On obtient les **équations d'Euler** :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho \vec{g}$$

soit, en projection sur un axe vertical ascendant z et pour un fluide au repos, $\vec{V} = \vec{0}$: on retrouve $dp/dz = -\rho g$ — l'hydrostatique est un cas particulier de la dynamique.

Le long d'une ligne de courant, en régime permanent, l'équation d'Euler projetée sur la tangente s'écrit :

$$\rho V \frac{dV}{ds} = -\frac{dp}{ds} - \rho g \frac{dz}{ds}$$

4.2 Théorème de Bernoulli

4.2.1 Énoncé

Intégrons l'équation précédente le long de la ligne de courant, pour un fluide **incompressible** en régime **permanent** :

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{constante le long d'une ligne de courant}$$

C'est le **théorème de Bernoulli** (Daniel Bernoulli, 1738). Si de plus l'écoulement est irrotationnel, la constante est la même dans tout l'écoulement.

Hypothèses à toujours vérifier : fluide parfait (frottements négligés), incompressible, régime permanent, le long d'une ligne de courant, pas de machine (ni pompe ni turbine) entre les points considérés.

4.2.2 Les trois formes de l'équation

Forme « pressions » (Pa) :

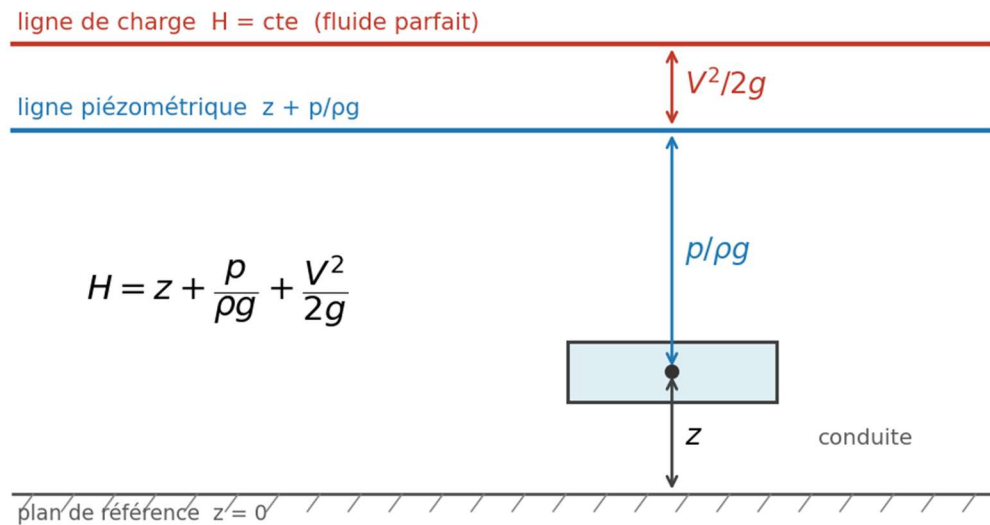
$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho V^2 = cte$$

p : pression statique ; $\rho g z$: pression de pesanteur ; $\frac{1}{2} \rho V^2$: **pression dynamique**.

Forme « hauteurs » (m) — la forme de l'hydraulicien, obtenue en divisant par ρg :

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = H = cte$$

z : cote (hauteur de position) ; $p/\rho g$: hauteur de pression ; $V^2/2g$: hauteur cinétique ; H : **charge totale**. La somme $z + p/\rho g$ est la **cote piézométrique**.



Les trois termes de la charge et leur lecture graphique : la ligne de charge est horizontale pour un fluide parfait, la ligne piézométrique se situe une hauteur cinétique en dessous.

Forme « énergies » (J/kg) : $\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = cte$.

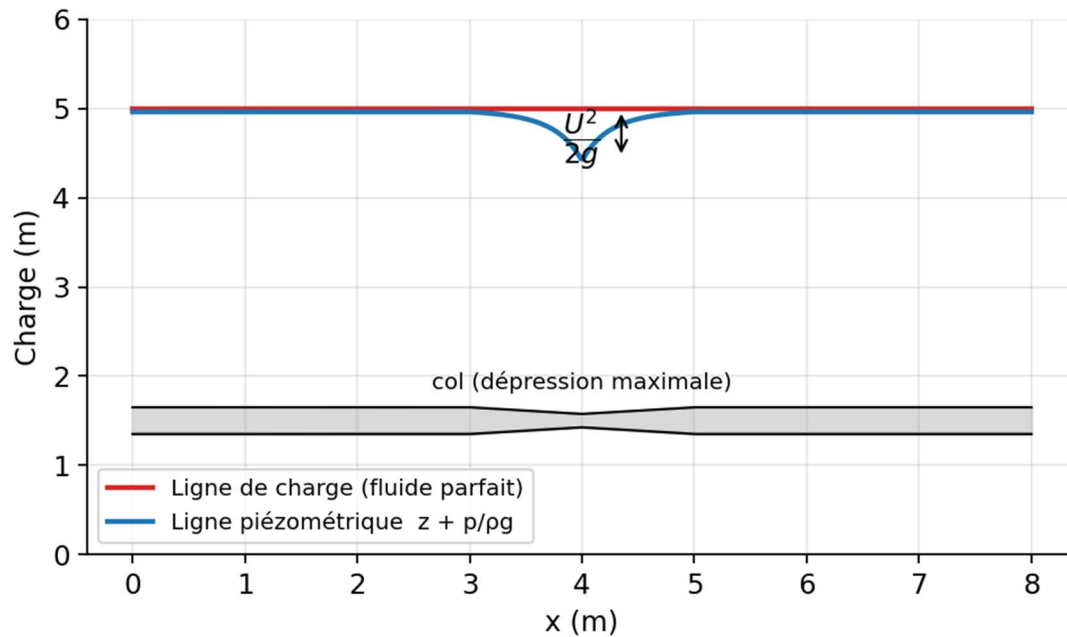
4.2.3 Interprétation énergétique

Le théorème de Bernoulli exprime la **conservation de l'énergie mécanique** par unité de poids du fluide : en l'absence de frottement, l'énergie totale (potentielle de pression + potentielle de position + cinétique) se conserve, les trois formes pouvant se convertir l'une en l'autre. Dans un convergent horizontal, l'accélération du fluide (gain d'énergie cinétique) s'accompagne d'une chute de pression, et réciproquement dans un divergent.

4.2.4 Représentation graphique : lignes de charge et piézométrique

Le long d'une conduite, on trace :

- la **ligne de charge** : $H = z + p/\rho g + V^2/2g$ — horizontale pour un fluide parfait ;
- la **ligne piézométrique** : $z + p/\rho g$ — située sous la ligne de charge, à une distance $V^2/2g$.



Lignes de charge et piézométrique le long d'une conduite munie d'un venturi (fluide parfait) : la charge est horizontale, la ligne piézométrique plonge au col où la vitesse est maximale.

Ces diagrammes, complétés au chapitre 6 par les pertes de charge, constituent l'outil graphique quotidien du projeteur de réseaux.

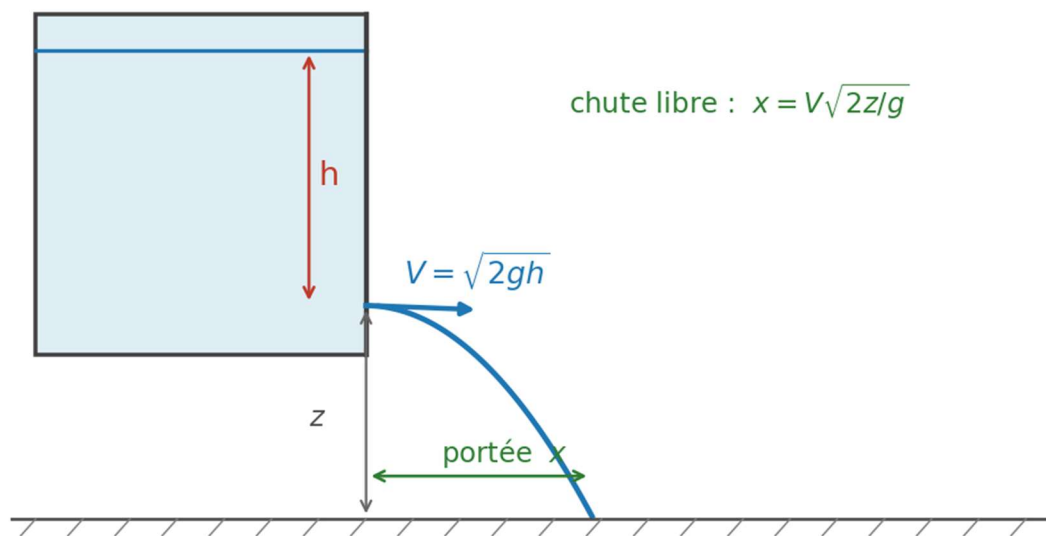
4.3 Applications du théorème de Bernoulli

4.3.1 Formule de Torricelli : vidange d'un réservoir

Un réservoir ouvert, de grande section, se vide par un orifice situé à la profondeur h sous la surface libre. Appliquons Bernoulli entre un point A de la surface libre ($p_A = p_{atm}$, $V_A \approx 0$ car la section du réservoir est grande, $z_A = h$) et le jet à la sortie B ($p_B = p_{atm}$ car le jet débouche à l'air libre, $z_B = 0$) :

$$h = \frac{V_B^2}{2g} \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{2gh}}$$

C'est la **formule de Torricelli** : la vitesse de sortie est celle d'une chute libre de hauteur h .



Vidange par un orifice : la vitesse de sortie est celle d'une chute libre de hauteur h ; le jet décrit ensuite une parabole dont la portée se calcule par les lois de la chute libre.

Débit réel. Le jet se contracte à la sortie (section contractée $S_c = C_c S$) et les frottements réduisent légèrement la vitesse ($C_v \approx 0,97-0,99$). Le débit réel s'écrit :

$$Q = C_d S \sqrt{2gh}$$

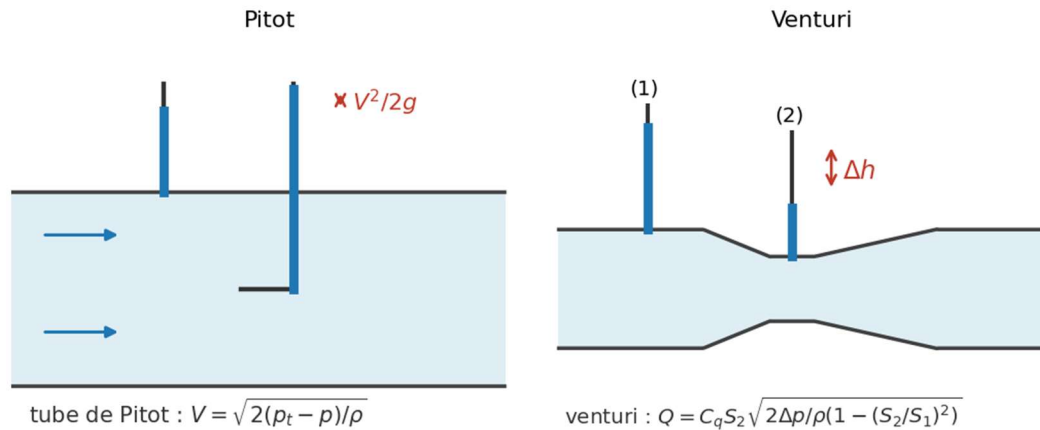
avec $C_d = C_c C_v$ le **coefficient de débit** ($C_d \approx 0,60-0,62$ pour un orifice en mince paroi ; $C_d \approx 0,82$ pour un ajutage cylindrique rentrant ; $C_d \approx 0,97$ pour un orifice profilé).

4.3.2 Tube de Pitot : mesure de vitesse

Un tube de Pitot présente face à l'écoulement un orifice où le fluide est arrêté (**point d'arrêt**). Bernoulli entre un point amont (pression statique p , vitesse V) et le point d'arrêt (pression totale p_t , vitesse nulle), à la même cote :

$$p_t = p + \frac{1}{2}\rho V^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \sqrt{\frac{2(p_t - p)}{\rho}}}$$

Le tube de Pitot statique (tube de Prandtl) mesure directement l'écart $p_t - p$, souvent par un manomètre différentiel. Applications : anémométrie, vitesse des avions, mesures en canal et en conduite.



Les deux appareils déprimogènes de référence : le tube de Pitot mesure une vitesse locale, le venturi mesure un débit.

4.3.3 Tube de Venturi : mesure de débit

Un venturi est un convergent suivi d'un col de section $S_2 < S_1$ puis d'un divergent doux. Entre l'entrée (1) et le col (2), pour une conduite horizontale, Bernoulli et continuité donnent :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2, \quad V_1 S_1 = V_2 S_2 = Q$$

d'où :

$$Q = C_q S_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (S_2/S_1)^2]}}$$

Le coefficient C_q ($\approx 0,95-0,99$) corrige les effets visqueux. La mesure de la différence de pression $p_1 - p_2$ (manomètre différentiel ou capteurs) donne donc le débit : le venturi est un **débitmètre à organe déprimogène**, comme le diaphragme et la tuyère, qui obéissent à la même formule avec des coefficients plus faibles.

Attention à la cavitation : au col, la pression chute ; pour les forts débits, elle peut atteindre la pression de vapeur saturante.

4.3.4 Phénomène de Venturi et applications diverses

La dépression créée par une survitesse explique de nombreux phénomènes et dispositifs : trompe à eau, carburateur, pulvérisateur, effet de succion entre navires qui se croisent, arrachement des toitures par grand vent (dépression extrados).

4.4 Généralisation : Bernoulli avec échange d'énergie

Lorsqu'une **pompe** fournit au fluide une énergie massique correspondant à une hauteur H_p (hauteur manométrique), ou qu'une **turbine** prélève une hauteur H_t , entre l'amont (1) et l'aval (2) :

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + H_p = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + H_t$$

La **puissance hydraulique** échangée s'écrit :

$$P = \rho g Q H$$

et la puissance sur l'arbre s'en déduit par le rendement : $P_{arbre} = \frac{\rho g Q H_p}{\eta}$ pour une pompe, $P_{arbre} = \eta \rho g Q H_t$ pour une turbine. (Les pertes de charge, ignorées ici, seront ajoutées au chapitre 6.)

4.5 Exercices résolus

4.5.1 Exercice 4.1 — Conduite avec changement de section et de niveau

De l'eau s'écoule en régime permanent dans une conduite qui s'élève de $z_1 = 0$ à $z_2 = 2,50$ m, la section passant de $D_1 = 150$ mm à $D_2 = 100$ mm. Le débit est $Q = 20$ L/s et la pression au point 1 vaut $p_1 = 250$ kPa. Fluide parfait. Calculer V_1 , V_2 et p_2 .

Solution.

Vitesses (continuité) :

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0,020}{\pi \times 0,150^2} = 1,13 \text{ m/s}; \quad V_2 = \frac{4 \times 0,020}{\pi \times 0,100^2} = 2,55 \text{ m/s}$$

Bernoulli entre 1 et 2 :

$$p_2 = p_1 + \rho g(z_1 - z_2) + \frac{\rho}{2}(V_1^2 - V_2^2)$$

$$p_2 = 250\,000 + 1000 \times 9,81 \times (0 - 2,50) + 500(1,13^2 - 2,55^2)$$

$$p_2 = 250\,000 - 24\,525 + 500(1,277 - 6,503) = 250\,000 - 24\,525 - 2613 \\ = 222\,862 \text{ Pa}$$

$$p_2 \approx 223 \text{ kPa}$$

La pression chute pour deux raisons cumulées : l'élévation (24,5 kPa) et l'accélération du fluide (2,6 kPa).

4.5.2 Exercice 4.2 — Vidange d'un réservoir (Torricelli)

Un réservoir ouvert de grande section contient de l'eau sur 4,00 m au-dessus d'un orifice en mince paroi de diamètre $d = 50 \text{ mm}$ ($C_d = 0,62$). 1. Calculer la vitesse théorique du jet et le débit réel. 2. L'orifice débouche horizontalement à 1,50 m au-dessus du sol : à quelle distance horizontale le jet touche-t-il le sol ?

Solution.

1. Vitesse de Torricelli :

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 4,00} = 8,86 \text{ m/s}$$

Débit réel :

$$Q = C_d \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh} = 0,62 \times \frac{\pi \times 0,050^2}{4} \times 8,86 = 1,079 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} \approx 10,8 \text{ L/s}$$

2. Le jet suit une trajectoire balistique. Temps de chute de 1,50 m :

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 1,50}{9,81}} = 0,553 \text{ s}$$

Portée (avec la vitesse réelle $C_v V \approx 0,98 \times 8,86 = 8,68 \text{ m/s}$) :

$$x = 8,68 \times 0,553 = 4,80 \text{ m}$$

4.5.3 Exercice 4.3 — Temps de vidange d'un réservoir cylindrique

Le réservoir précédent est cylindrique, de diamètre $D = 2,00 \text{ m}$. Calculer le temps nécessaire pour abaisser le niveau de $h_1 = 4,00 \text{ m}$ à $h_2 = 1,00 \text{ m}$ au-dessus de l'orifice ($d = 50 \text{ mm}$, $C_d = 0,62$).

Solution.

Le régime est quasi permanent (le niveau varie lentement). Bilan de volume :

$$-S \frac{dh}{dt} = Q(h) = C_d s \sqrt{2gh}$$

avec $S = \pi D^2/4 = 3,142 \text{ m}^2$ et $s = \pi d^2/4 = 1,963 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. En séparant les variables :

$$dt = -\frac{S}{C_d s \sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}} \Rightarrow t = \frac{2S}{C_d s \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})$$

Application numérique :

$$t = \frac{2 \times 3,142}{0,62 \times 1,963 \times 10^{-3} \times \sqrt{19,62}} (\sqrt{4,00} - \sqrt{1,00}) = \frac{6,283}{5,391 \times 10^{-3}} \times (2,00 - 1,00)$$

$$t = 1166 \text{ s} \approx 19,4 \text{ min}$$

Remarque. Le temps de vidange totale ($h_2 = 0$) s'obtiendrait avec $\sqrt{h_2} = 0$: $t = 2331 \text{ s}$; la vidange est deux fois plus longue que si le débit initial était maintenu — le débit décroît avec la charge.

4.5.4 Exercice 4.4 — Tube de Pitot en conduite

Un tube de Pitot statique placé dans l'axe d'une conduite d'eau est relié à un manomètre différentiel au mercure qui indique une dénivellation $\Delta h = 60 \text{ mm}$. Calculer la vitesse au point de mesure.

Solution.

L'écart de pression mesuré vaut :

$$p_t - p = (\rho_{Hg} - \rho_e) g \Delta h = (13\,600 - 1000) \times 9,81 \times 0,060 = 7416 \text{ Pa}$$

Vitesse :

$$V = \sqrt{\frac{2(p_t - p)}{\rho_e}} = \sqrt{\frac{2 \times 7416}{1000}} = 3,85 \text{ m/s}$$

Remarque. La vitesse mesurée est locale (à l'axe, c'est la vitesse maximale). Pour obtenir le débit, il faut soit explorer la section, soit appliquer un coefficient de profil ($U/V_{max} \approx 0,84$ en régime turbulent lisse).

4.5.5 Exercice 4.5 — Débitmètre de Venturi

Un venturi horizontal ($C_q = 0,98$) est monté sur une conduite d'eau de diamètre $D_1 = 200 \text{ mm}$; le col a pour diamètre $D_2 = 100 \text{ mm}$. Le manomètre différentiel au mercure branché entre l'entrée et le col indique $\Delta h = 150 \text{ mm}$. Calculer le débit.

Solution.

Différence de pression :

$$p_1 - p_2 = (\rho_{Hg} - \rho_e)g \Delta h = 12\,600 \times 9,81 \times 0,150 = 18\,541 \text{ Pa}$$

Sections : $S_1 = 3,142 \times 10^{-2} \text{ m}^2$; $S_2 = 7,854 \times 10^{-3} \text{ m}^2$; rapport $(S_2/S_1)^2 = (1/4)^2 = 0,0625$.

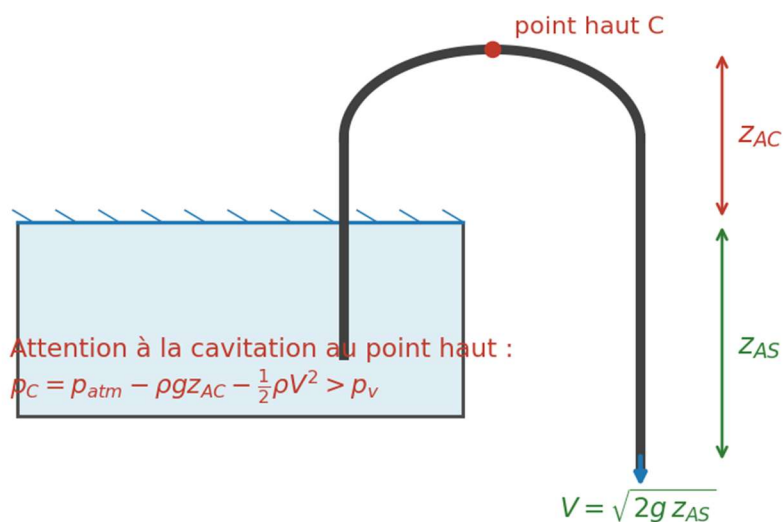
$$Q = C_q S_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[1 - (S_2/S_1)^2]}} = 0,98 \times 7,854 \times 10^{-3} \sqrt{\frac{2 \times 18\,541}{1000 \times 0,9375}}$$

$$Q = 7,697 \times 10^{-3} \times \sqrt{39,56} = 7,697 \times 10^{-3} \times 6,29 = 4,84 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q \approx 48,4 \text{ L/s}$$

Vérification des vitesses : $V_1 = Q/S_1 = 1,54 \text{ m/s}$; $V_2 = 6,16 \text{ m/s}$ — cohérent avec un rapport de sections de 4.

4.5.6 Exercice 4.6 — Siphon



Siphon : l'écoulement est moteur tant que la sortie est sous le plan d'eau, mais la pression au point haut chute d'autant plus que celui-ci est élevé — c'est là que la cavitation guette.

Un siphon de diamètre constant $d = 80 \text{ mm}$ amorce la vidange d'un réservoir. Le point haut C du siphon est à $1,50 \text{ m}$ au-dessus de la surface libre ; l'extrémité aval S débouche à l'air libre $3,00 \text{ m}$ au-dessous de la surface libre. Fluide parfait, réservoir de grande section, pression atmosphérique $101,3 \text{ kPa}$, pression de vapeur $2,3 \text{ kPa}$. 1. Calculer la vitesse et le débit à la sortie. 2. Calculer la pression absolue au point haut C. 3. Quelle est la hauteur maximale admissible du point C au-dessus de la surface libre ?

Solution.

1. Bernoulli entre la surface libre A et la sortie S (tous deux à l'air libre) :

$$V_S = \sqrt{2g z_{AS}} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 3,00} = 7,67 \text{ m/s}$$

$$Q = V_S \frac{\pi d^2}{4} = 7,67 \times 5,027 \times 10^{-3} = 3,86 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} \approx 38,6 \text{ L/s}$$

2. Diamètre constant $\Rightarrow V_C = V_S = 7,67 \text{ m/s}$. Bernoulli entre A et C (pressions absolues) :

$$p_C = p_{atm} - \rho g z_{AC} - \frac{1}{2} \rho V_C^2 = 101\,300 - 9810 \times 1,50 - 500 \times 7,67^2$$

$$p_C = 101\,300 - 14\,715 - 29\,415 = 57\,170 \text{ Pa} \approx 57,2 \text{ kPa}$$

Le point haut est en dépression (pression relative $-44,1 \text{ kPa}$), ce qui est normal pour un siphon.

3. Condition de non-cavitation : $p_C \geq p_v$:

$$z_{AC,max} = \frac{p_{atm} - p_v}{\rho g} - \frac{V^2}{2g} = \frac{101\,300 - 2300}{9810} - \frac{7,67^2}{19,62} = 10,09 - 3,00 = 7,09 \text{ m}$$

Au-delà, la veine se romprait (cavitation/désamorçage). En pratique, on garde une marge importante (frottements et dégazage réduisent cette limite).

4.5.7 Exercice 4.7 — Pompage entre deux réservoirs (fluide parfait)

Une pompe aspire l'eau d'un puits dont le plan d'eau est à la cote 0 et la refoule dans un réservoir dont la surface libre est à la cote 35,0 m. Le débit demandé est $Q = 30 \text{ L/s}$. Fluide parfait, réservoirs à l'air libre et de grande section. 1. Calculer la hauteur manométrique de la pompe. 2. Calculer la puissance hydraulique et la puissance absorbée pour un rendement global de 70 %.

Solution.

1. Bernoulli généralisé entre les deux surfaces libres (vitesses négligeables, pressions atmosphériques) :

$$H_p = z_2 - z_1 = 35,0 \text{ m}$$

Sans frottement, la pompe ne doit vaincre que la dénivellation géométrique (hauteur géométrique).

2. Puissance hydraulique :

$$P_h = \rho g Q H_p = 1000 \times 9,81 \times 0,030 \times 35,0 = 10\,300 \text{ W} \approx 10,3 \text{ kW}$$

Puissance absorbée :

$$P_{abs} = \frac{P_h}{\eta} = \frac{10,3}{0,70} = 14,7 \text{ kW}$$

Au chapitre 6, les pertes de charge s'ajouteront à la hauteur géométrique et majoreront ces puissances.

5 Théorème des quantités de mouvement

Le théorème de Bernoulli fournit vitesses et pressions ; il ne dit rien des **efforts globaux** exercés par un écoulement sur les parois qui le guident. C'est l'objet du théorème des quantités de mouvement (théorème d'Euler), qui permet de calculer les forces d'ancrage des coudes, les poussées des jets sur les obstacles, les efforts sur les vannes et déversoirs — sans connaître le détail de l'écoulement interne.

5.1 Énoncé du théorème d'Euler

5.1.1 Volume de contrôle

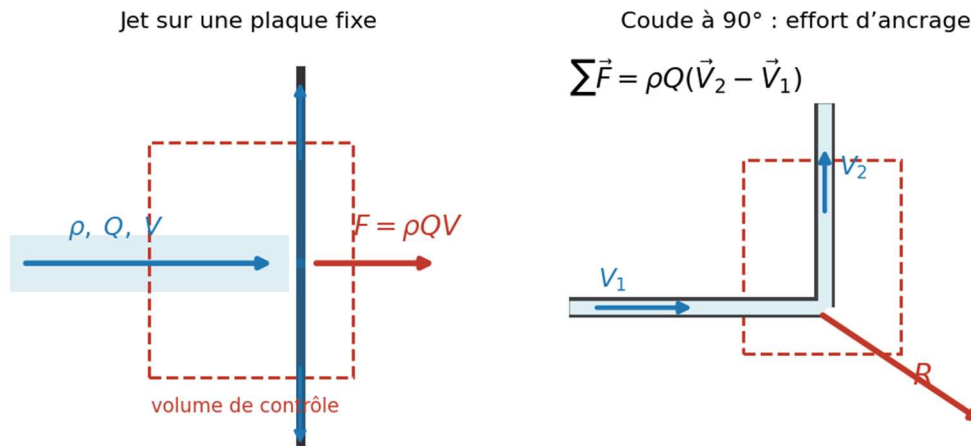
On isole par la pensée un **volume de contrôle** fixe $\mathcal{V}$, limité par une surface de contrôle Σ (sections d'entrée et de sortie + parois). Le théorème résulte de l'application de la deuxième loi de Newton au fluide contenu dans ce volume.

5.1.2 Théorème (régime permanent)

En régime permanent, la somme des forces extérieures appliquées au fluide contenu dans le volume de contrôle est égale au flux net de quantité de mouvement sortant de la surface de contrôle.

Pour un tube de courant à une entrée (1) et une sortie (2), avec des vitesses uniformes dans les sections :

$$\boxed{\Sigma \vec{F}_{ext} = Q_m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)}$$



Méthode du volume de contrôle : à gauche, jet dévié par une plaque ; à droite, coude à 90° dont l'ancrage doit reprendre la résultante des forces de pression et de la variation de quantité de mouvement.

Les forces extérieures comprennent :

- les **forces de pression** sur les sections d'entrée et de sortie : $p_1 S_1 \vec{n}_1$, $p_2 S_2 \vec{n}_2$ (on travaille en pressions relatives lorsque l'atmosphère entoure le système) ;
- le **poids** du fluide contenu dans le volume de contrôle ;
- la **réaction** $\vec{R}$ des parois solides sur le fluide.

La force exercée par le **fluide sur la paroi** est $-\vec{R}$ (principe de l'action et de la réaction) : c'est généralement elle que cherche l'ingénieur.

5.1.3 Méthode de résolution systématique

1. Choisir le volume de contrôle (entrées/sorties dans des zones où l'écoulement est uniforme).
2. Faire le bilan des forces extérieures (pressions **relatives** sur les sections, poids, réaction inconnue $\vec{R}$).
3. Calculer les vitesses par continuité, les pressions par Bernoulli si nécessaire.
4. Écrire le théorème **en projection sur des axes** clairement définis.
5. En déduire $\vec{R}$, puis la force sur la structure $\vec{F} = -\vec{R}$.

Remarque (coefficient de quantité de mouvement). L'hypothèse de vitesse uniforme sous-estime légèrement le flux réel de quantité de mouvement ; on le corrige au besoin par le coefficient de Boussinesq β ($\beta \approx 1,02$ à $1,07$ en turbulent, $\beta = 4/3$ en laminaire) : flux = $\beta \rho Q U$. Sauf mention contraire, on prend $\beta = 1$.

5.2 Applications classiques

5.2.1 Jet sur une plaque plane fixe

Un jet horizontal de section S et de vitesse V frappe une plaque plane **perpendiculaire**. À pression atmosphérique partout (jet libre), le fluide est dévié à 90° : la composante de vitesse selon l'axe du jet passe de V à 0.

$$F = \rho QV = \rho SV^2$$

Si la plaque est **inclinée** d'un angle α sur l'axe du jet, la force normale à la plaque vaut $F_n = \rho SV^2 \sin \alpha$.

5.2.2 Jet sur un auget en U (déviation à 180°)

Le jet est retourné : $V_2 = -V_1$ (mêmes modules, frottements négligés) :

$$F = \rho Q [V - (-V)] = 2\rho QV = 2\rho SV^2$$

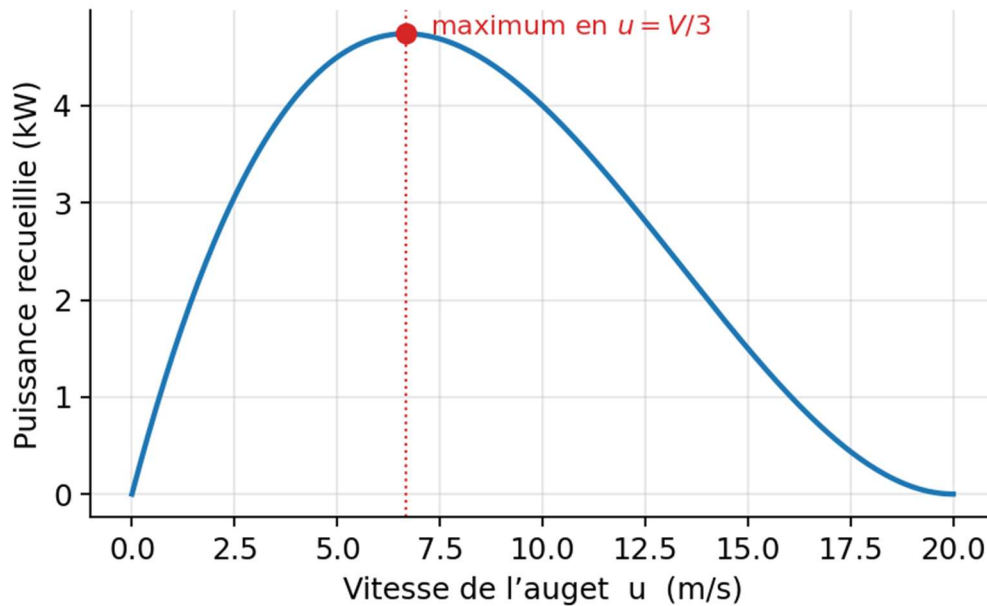
La force est **double** de celle sur la plaque plane : c'est le principe des augets des turbines Pelton.

5.2.3 Auget mobile

Si l'auget se déplace à la vitesse u dans le sens du jet, le débit intercepté et la vitesse relative deviennent $\rho S(V - u)$ et $(V - u)$:

$$F = 2\rho S(V - u)^2, \quad P = F u$$

La puissance recueillie est maximale pour $u = V/3$ dans ce modèle simple d'auget isolé (pour une roue à augets multiples interceptant tout le débit, l'optimum est $u = V/2$).



Puissance recueillie par un auget mobile isolé en fonction de sa vitesse u : maximum pour $u = V/3$ (tracé pour $V = 20$ m/s, jet de 50 mm).

5.2.4 Coude de conduite

Dans un coude, le fluide change de direction : la conduite doit exercer sur lui la force correspondante, et subir la force opposée, qui doit être reprise par des **massifs d'ancrage (butées)** — dimensionnement courant des réseaux d'adduction. Le calcul complet est mené dans l'exercice 5.3.

5.3 Exercices résolus

5.3.1 Exercice 5.1 — Jet sur plaque fixe perpendiculaire

Un jet d'eau de diamètre $d = 60$ mm et de vitesse $V = 15$ m/s frappe perpendiculairement une plaque plane fixe. Calculer la force exercée sur la plaque.

Solution.

Section et débit :

$$S = \frac{\pi \times 0,060^2}{4} = 2,827 \times 10^{-3} \text{ m}^2; \quad Q = SV = 4,241 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$$

Volume de contrôle : le jet entre l'arrivée et la plaque. En projection sur l'axe du jet, la vitesse sortante est nulle ; la seule force extérieure horizontale est la réaction R de la plaque :

$$-R = \rho Q(0 - V) \Rightarrow R = \rho QV = 1000 \times 4,241 \times 10^{-2} \times 15 = 636 \text{ N}$$

La plaque subit une poussée de **636 N** dans le sens du jet.

5.3.2 Exercice 5.2 — Jet sur auget fixe puis mobile

Le même jet ($d = 60 \text{ mm}$, $V = 15 \text{ m/s}$) frappe un auget en U qui le retourne à 180° . 1.

Auget fixe : calculer la force. 2. Auget se déplaçant à $u = 5 \text{ m/s}$ dans le sens du jet : calculer la force et la puissance recueillie. 3. Quelle vitesse u maximiserait la puissance et que vaudrait-elle ?

Solution.

1. Auget fixe, déviation à 180° :

$$F = 2\rho S V^2 = 2 \times 1000 \times 2,827 \times 10^{-3} \times 15^2 = 1272 \text{ N}$$

2. Auget mobile : la vitesse relative est $V - u = 10 \text{ m/s}$:

$$F = 2\rho S (V - u)^2 = 2 \times 1000 \times 2,827 \times 10^{-3} \times 10^2 = 565 \text{ N}$$

$$P = F u = 565 \times 5 = 2827 \text{ W} \approx 2,83 \text{ kW}$$

3. $P(u) = 2\rho S (V - u)^2 u$. Dérivons : $dP/du = 2\rho S (V - u)(V - 3u) = 0$, d'où $u = V/3 = 5 \text{ m/s}$ (l'autre racine $u = V$ annule la puissance). La vitesse imposée en 2. est précisément l'optimum :

$$P_{\max} = 2,83 \text{ kW}$$

À titre de comparaison, la puissance cinétique du jet vaut $\frac{1}{2}\rho S V^3 = 4,77 \text{ kW}$: l'auget isolé en recueille au mieux $8/27 \approx 59 \%$.

5.3.3 Exercice 5.3 — Force d'ancrage d'un coude horizontal

Un coude horizontal à 90° de diamètre constant $D = 300 \text{ mm}$ est parcouru par un débit d'eau $Q = 250 \text{ L/s}$. La pression relative à l'entrée vaut $p_1 = 200 \text{ kPa}$. Fluide parfait (donc $p_2 = p_1$, même diamètre, coude horizontal). Calculer la force exercée par l'eau sur le coude et la direction de la force d'ancrage nécessaire. Le poids de l'eau contenue est repris par les supports et n'intervient pas dans le plan horizontal.

Solution.

Données : $S = \pi D^2/4 = 7,069 \times 10^{-2} \text{ m}^2$; $V = Q/S = 0,250/0,07069 = 3,54 \text{ m/s}$; $p_1 = p_2 = 200 \text{ kPa}$.

Axes : x dans la direction de l'écoulement amont, y dans la direction de l'écoulement aval. $\vec{V}_1 = V\vec{e}_x$, $\vec{V}_2 = V\vec{e}_y$.

Théorème d'Euler en projection, $\vec{R} = (R_x, R_y)$ étant l'action du coude sur l'eau :

$$x: \quad p_1 S + R_x = \rho Q(0 - V) \Rightarrow R_x = -p_1 S - \rho QV$$

$$y: \quad -p_2 S + R_y = \rho Q(V - 0) \Rightarrow R_y = p_2 S + \rho QV$$

Application numérique :

$$pS = 200\,000 \times 7,069 \times 10^{-2} = 14\,137 \text{ N}; \quad \rho QV = 1000 \times 0,250 \times 3,54 = 884 \text{ N}$$

$$R_x = -(14\,137 + 884) = -15\,021 \text{ N}; \quad R_y = +15\,021 \text{ N}$$

Force de l'eau **sur le coude** : $\vec{F} = -\vec{R} = (+15\,021, -15\,021) \text{ N}$, soit une résultante :

$$F = 15\,021\sqrt{2} = 21\,243 \text{ N} \approx 21,2 \text{ kN}$$

dirigée à 45° « vers l'extérieur » du coude (bissectrice extérieure). Le massif d'ancrage doit reprendre cet effort. On remarque que le terme de pression (14,1 kN) domine largement le terme de quantité de mouvement (0,9 kN) : **même à l'arrêt, un coude sous pression pousse sur son butée** — c'est pourquoi les butées se dimensionnent aussi pour l'épreuve en pression.

5.3.4 Exercice 5.4 — Convergent horizontal : effort sur la bride

Un convergent horizontal fait passer une conduite d'eau du diamètre $D_1 = 250 \text{ mm}$ au diamètre $D_2 = 150 \text{ mm}$. Le débit vaut $Q = 80 \text{ L/s}$ et la pression relative amont $p_1 = 180 \text{ kPa}$. Fluide parfait. Calculer la force axiale exercée par l'eau sur le convergent.

Solution.

Sections et vitesses :

$$S_1 = 4,909 \times 10^{-2} \text{ m}^2; \quad S_2 = 1,767 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$V_1 = \frac{0,080}{0,04909} = 1,63 \text{ m/s}; \quad V_2 = \frac{0,080}{0,01767} = 4,53 \text{ m/s}$$

Pression aval par Bernoulli (conduite horizontale) :

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}(V_1^2 - V_2^2) = 180\,000 + 500(2,66 - 20,52) = 180\,000 - 8930 \\ = 171\,070 \text{ Pa}$$

Théorème d'Euler en projection axiale (R = action du convergent sur l'eau, comptée positive vers l'aval) :

$$p_1 S_1 - p_2 S_2 + R = \rho Q (V_2 - V_1)$$

$$R = \rho Q (V_2 - V_1) - p_1 S_1 + p_2 S_2$$

$$R = 1000 \times 0,080 \times (4,53 - 1,63) - 180\,000 \times 0,04909 + 171\,070 \times 0,01767$$

$$R = 232 - 8836 + 3023 = -5581 \text{ N}$$

L'action de l'eau sur le convergent vaut $F = -R = +5581 \text{ N} \approx \mathbf{5,6 \text{ kN}}$, **dirigée vers l'aval** : le convergent est « poussé » dans le sens de l'écoulement et sa liaison à la conduite (brides, boulons ou massif) doit reprendre cet effort de traction.

5.3.5 Exercice 5.5 — Réaction d'un jet à la sortie d'un réservoir

Un réservoir posé sur des rouleaux (frottement négligeable) contient de l'eau maintenue à une hauteur $h = 2,00 \text{ m}$ au-dessus d'un orifice latéral profilé ($C_d \approx 1$) de section $s = 20 \text{ cm}^2$. Calculer la force horizontale à exercer pour maintenir le réservoir immobile.

Solution.

Vitesse de sortie (Torricelli) :

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 2,00} = 6,26 \text{ m/s}$$

$$\text{Débit : } Q = sV = 20 \times 10^{-4} \times 6,26 = 1,253 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Volume de contrôle : le réservoir entier. La quantité de mouvement entre à vitesse nulle et sort à la vitesse V horizontale ; la force de retenue F est la seule force horizontale extérieure :

$$F = \rho QV = \rho s (2gh) = 1000 \times 1,253 \times 10^{-2} \times 6,26 = 78,4 \text{ N}$$

On note le résultat remarquable $F = 2\rho ghs$: la poussée de réaction vaut **le double** de la force de pression hydrostatique $\rho gh s$ qui s'exercerait sur un bouchon fermant l'orifice. C'est le principe de la propulsion par réaction.

5.3.6 Exercice 5.6 — Jet incliné sur plaque : décomposition du débit

Un jet plan horizontal de vitesse $V = 12 \text{ m/s}$ et de débit $Q = 30 \text{ L/s}$ frappe une plaque plane lisse inclinée à $\alpha = 60^\circ$ sur la direction du jet. En négligeant la pesanteur et les frottements (les vitesses restent égales à V le long de la plaque), calculer : 1. la force

normale exercée sur la plaque ; 2. la répartition du débit entre les deux nappes qui s'échappent le long de la plaque.

Solution.

1. Axes liés à la plaque : normale n et tangente t . Plaque lisse $\Rightarrow$ la réaction est purement normale. En projection sur n , la vitesse incidente a pour composante $V \sin \alpha$, les nappes sortantes ont une composante normale nulle :

$$F_n = \rho Q V \sin \alpha = 1000 \times 0,030 \times 12 \times \sin 60^\circ = 312 \text{ N}$$

2. En projection sur t : aucune force tangentielle, donc le flux tangentiel de quantité de mouvement se conserve :

$$\rho Q_1 V - \rho Q_2 V = \rho Q V \cos \alpha \Rightarrow Q_1 - Q_2 = Q \cos \alpha$$

Avec la continuité $Q_1 + Q_2 = Q$:

$$Q_1 = \frac{Q}{2} (1 + \cos \alpha) = \frac{30}{2} (1 + 0,5) = 22,5 \text{ L/s}$$

$$Q_2 = \frac{Q}{2} (1 - \cos \alpha) = 7,5 \text{ L/s}$$

Les trois quarts du débit s'échappent du côté « aval » de la plaque, le quart restant remonte du côté amont.

6 Dynamique des fluides réels — Pertes de charge

Le fluide parfait ignore les frottements : la charge se conserve. Dans un fluide réel, la viscosité dissipe de l'énergie : la charge **décroît** dans le sens de l'écoulement. Ce chapitre commence par établir les équations générales du mouvement d'un fluide visqueux — les **équations de Navier-Stokes** —, en tire les rares solutions exactes utiles à l'ingénieur, puis quantifie la dissipation — les **pertes de charge** — et débouche sur le calcul pratique des conduites, cœur du métier de l'hydraulicien.

6.1 Les équations de Navier-Stokes

6.1.1 Bilan de quantité de mouvement sur une particule fluide

On applique le principe fondamental de la dynamique à une particule fluide de volume dV . Les forces en présence sont de trois natures :

- les **forces de volume** (pesanteur) : $\rho \vec{g} dV$;
- les **forces de pression**, dont la résultante par unité de volume vaut $-\vec{\nabla}p$;
- les **forces visqueuses**, échangées avec les particules voisines par frottement.
Pour un fluide **newtonien incompressible**, leur résultante par unité de volume vaut $\mu \Delta \vec{V}$ (où Δ est le laplacien vectoriel, appliqué composante par composante).

En égalant masse $\times$ accélération (dérivée particulaire du chapitre 3) et somme des forces, on obtient les **équations de Navier-Stokes** pour un fluide newtonien incompressible :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla}p + \rho \vec{g} + \mu \Delta \vec{V}$$

complétées par l'équation de continuité $\text{div } \vec{V} = 0$: quatre équations scalaires pour quatre inconnues (u, v, w, p).

En projection sur l'axe x (et de même sur y et z) :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Lecture physique, terme à terme :

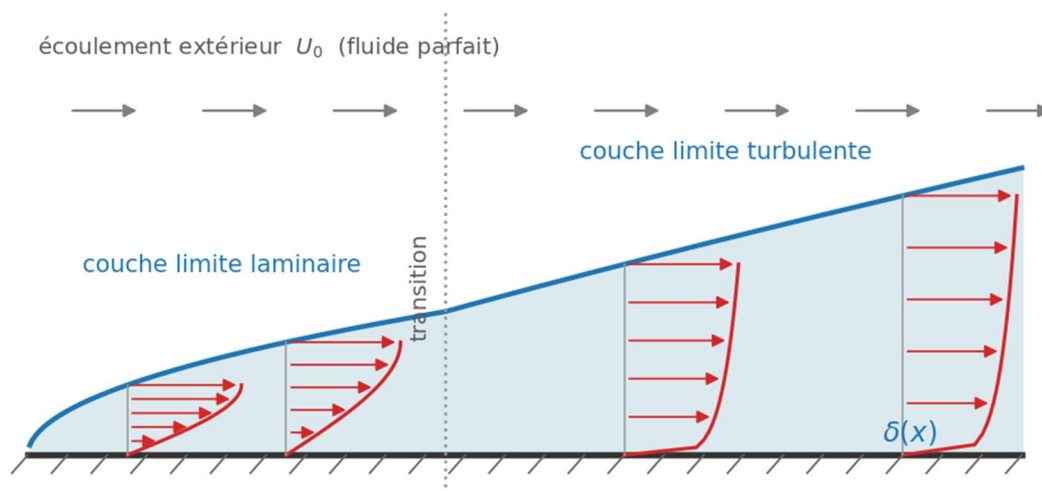
Terme	Signification
$\rho \partial \vec{V} / \partial t$	accélération locale (instationnarité)
$\rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$	accélération convective (non linéaire — source de toute la difficulté)
$-\vec{\nabla}p$	forces de pression
$\rho \vec{g}$	pesanteur
$\mu \Delta \vec{V}$	diffusion visqueuse de la quantité de mouvement

Aux parois solides s'ajoute la **condition d'adhérence** : la vitesse du fluide y est égale à celle de la paroi ($\vec{V} = \vec{0}$ sur une paroi fixe). C'est cette condition, absente du modèle de fluide parfait, qui engendre les couches limites et les frottements.

6.1.2 Cas limites remarquables

Les équations de Navier-Stokes contiennent toute la mécanique des fluides vue jusqu'ici :

- **fluide au repos** ($\vec{V} = \vec{0}$) : il reste $\vec{\nabla}p = \rho\vec{g}$, l'équation fondamentale de l'hydrostatique (chapitre 2) ;
- **fluide parfait** ($\mu = 0$) : on retrouve les équations d'**Euler** (chapitre 4), dont l'intégration le long d'une ligne de courant donne Bernoulli ;
- **écoulements rampants** ($Re \ll 1$, dits de Stokes) : l'inertie est négligeable devant la viscosité ; c'est le domaine des milieux poreux (loi de Darcy en géotechnique), de la sédimentation des particules fines et de la formule de Stokes $F = 3\pi\mu Vd$ utilisée au chapitre 7 ;
- **grands Reynolds** : l'inertie domine partout sauf près des parois, où la condition d'adhérence impose une **couche limite** mince dans laquelle se concentrent les frottements.



Développement de la couche limite le long d'une paroi : le profil est parabolique tant que la couche est laminaire, puis devient beaucoup plus plat près de la paroi après la transition. Tout le frottement se concentre dans cette zone mince.

Le rapport du terme d'inertie $\rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \sim \rho V^2/L$ au terme visqueux $\mu \Delta \vec{V} \sim \mu V/L^2$ redonne d'ailleurs le nombre de Reynolds : $Re = \rho V L / \mu$ — il mesure le poids relatif de ces deux termes.

Remarque. Le terme convectif non linéaire rend le système insoluble analytiquement dans le cas général ; l'existence et la régularité des solutions en trois dimensions constituent l'un des sept « problèmes du millénaire » de l'institut Clay. En pratique, l'ingénieur dispose de trois voies : les **solutions exactes** dans les géométries simples (ci-dessous), les **formules semi-empiriques** (Colebrook, plus loin dans ce chapitre) et

la **simulation numérique** (CFD), qui résout les équations moyennées (RANS) avec un modèle de turbulence.

6.1.3 Solution exacte n° 1 : écoulement de Poiseuille en conduite circulaire

C'est la solution exacte la plus importante pour l'hydraulicien : écoulement **laminaire, permanent, établi** dans une conduite cylindrique horizontale de rayon R . La vitesse est purement axiale, $u(r)$, et les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

Le gradient de pression $dp/dx = -\Delta p/L$ est constant. Une double intégration en r , avec $u(R) = 0$ (adhérence) et $du/dr = 0$ en $r = 0$ (symétrie), donne le **profil parabolique** :

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

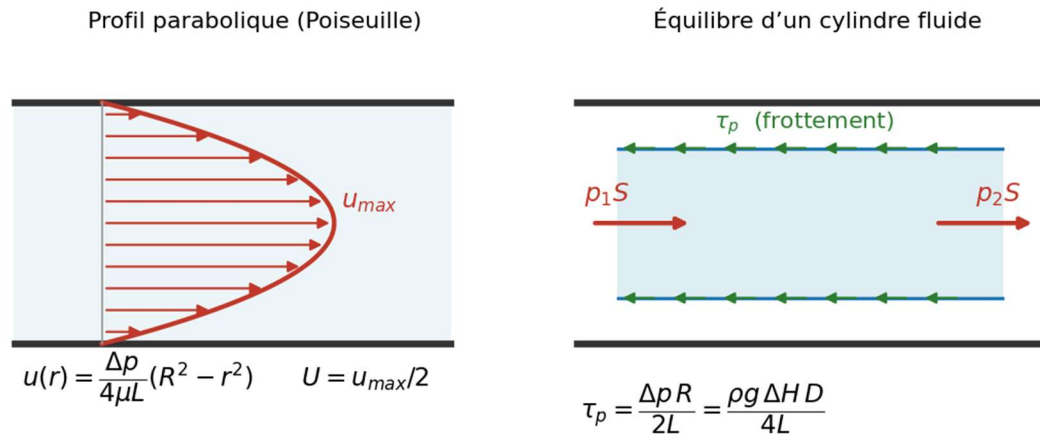
d'où la vitesse maximale à l'axe $u_{max} = \frac{\Delta p R^2}{4\mu L}$, la vitesse moyenne (intégration du profil sur la section) :

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{\Delta p R^2}{8\mu L} = \frac{u_{max}}{2}$$

et la **loi de Hagen-Poiseuille** pour le débit :

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu L} = \frac{\pi \Delta p D^4}{128 \mu L}$$

Le débit varie comme la **puissance quatrième du diamètre** : un doublement du diamètre multiplie le débit par 16 à perte de charge égale. En exprimant $\Delta p = \rho g \Delta H$ et en identifiant avec Darcy-Weisbach $\Delta H = \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$, on obtient :



Écoulement de Poiseuille : à gauche le profil parabolique et sa vitesse moyenne ; à droite l'équilibre d'un cylindre fluide entre forces de pression et frottement pariétal, qui donne $\tau_p = \rho g \Delta H D / 4L$.

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

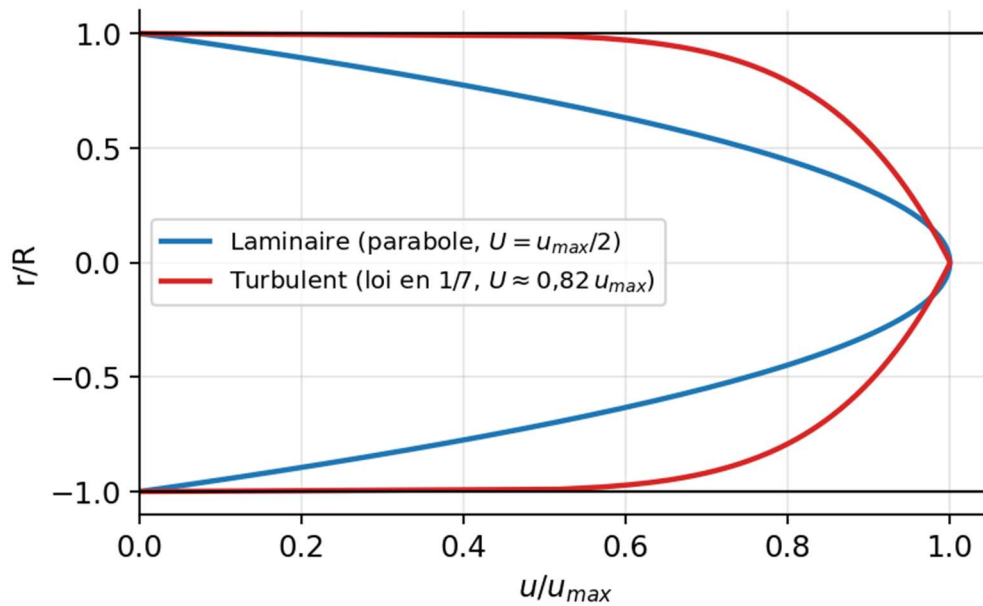
Le coefficient de perte de charge laminaire utilisé dans la suite de ce chapitre n'est donc pas empirique : c'est une **conséquence exacte des équations de Navier-Stokes**.

6.1.4 Solution exacte n° 2 : écoulement entre deux plaques planes

Entre deux plaques parallèles distantes de $2h$, le même raisonnement donne $u(y) = \frac{\Delta p}{2\mu} (h^2 - y^2)$ et $U = \frac{2}{3} u_{max}$. Si de plus la plaque supérieure se déplace à la vitesse V_0 sans gradient de pression, on retrouve le profil **linéaire de Couette** $u = V_0 y / (2h)$ du chapitre 1 : les deux écoulements de référence du cours sont deux solutions exactes de Navier-Stokes.

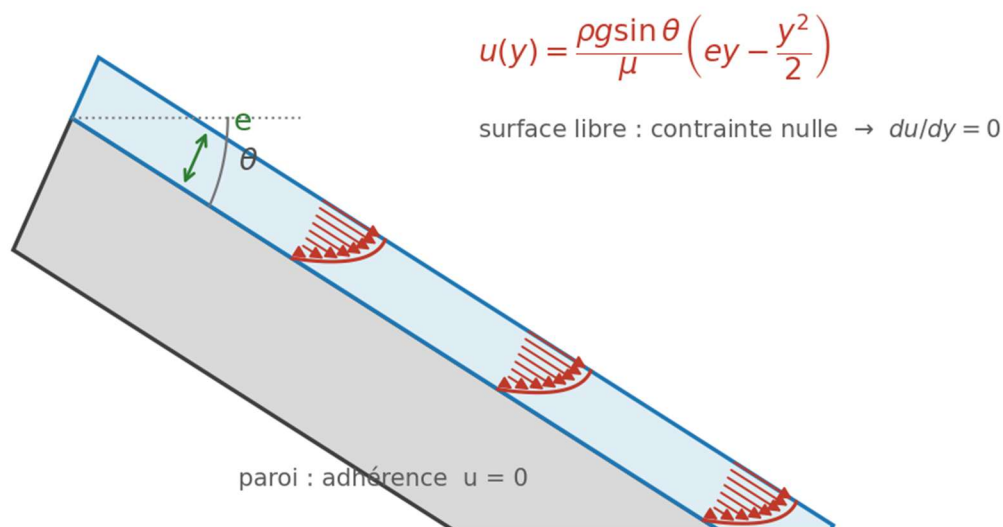
6.1.5 Et la turbulence ?

En régime turbulent, les équations restent valables mais leurs solutions sont instationnaires, tridimensionnelles et chaotiques. On travaille alors sur les **grandeurs moyennes** (décomposition de Reynolds $u = \bar{u} + u'$) : le moyennage fait apparaître des contraintes supplémentaires, les **contraintes de Reynolds** $-\rho \overline{u'v'}$, qui traduisent le transport de quantité de mouvement par les fluctuations et qu'il faut modéliser (problème de fermeture). C'est pourquoi le régime turbulent en conduite est traité par des lois semi-empiriques (Colebrook-White) et non par une solution exacte.



Profils de vitesse en conduite : parabole laminaire (Poiseuille) et profil turbulent moyen, beaucoup plus plat au centre et plus raide à la paroi.

6.1.6 Exercice résolu 6.0 — Film d'eau ruisselant sur un parement incliné



Film ruisselant sur un parement incliné : profil « demi-Poiseuille », vitesse nulle à la paroi (adhérence) et gradient nul à la surface libre (contrainte nulle).

Une lame d'eau d'épaisseur $e = 2,0 \text{ mm}$ ruisselle en régime laminaire permanent sur un parement plan incliné de $\theta = 30^\circ$ sur l'horizontale (coursier, parement de talus). La surface libre est au contact de l'air (contrainte de cisaillement nulle). ($\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$)

1. À partir des équations de Navier–Stokes, établir le profil de vitesse $u(y)$, y étant mesuré perpendiculairement au parement. 2. Calculer la vitesse en surface et le débit par mètre de largeur. 3. Vérifier a posteriori l'hypothèse laminaire.

Solution.

1. Écoulement établi, permanent, pression atmosphérique uniforme sur l'épaisseur du film : dans la direction de l'écoulement, Navier–Stokes se réduit à l'équilibre entre pesanteur motrice et viscosité :

$$0 = \rho g \sin \theta + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\rho g \sin \theta}{\mu}$$

Double intégration avec $u(0) = 0$ (adhérence au parement) et $\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=e} = 0$ (surface libre) :

$$u(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left(e y - \frac{y^2}{2} \right)$$

Le profil est un **demi-Poiseuille** : parabole dont le sommet est à la surface libre.

2. Vitesse en surface ($y = e$), avec $\rho g \sin \theta = 1000 \times 9,81 \times 0,5 = 4905 \text{ N/m}^3$:

$$u_s = \frac{\rho g \sin \theta e^2}{2\mu} = \frac{4905 \times (2,0 \times 10^{-3})^2}{2 \times 10^{-3}} = \frac{1,962 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-3}} = 9,81 \text{ m/s}$$

Valeur étonnamment élevée pour un film de 2 mm — le calcul est correct, mais il repose sur l'hypothèse laminaire, qu'il faudra contrôler à la question 3.

Débit par mètre de largeur (intégration du profil) :

$$q = \int_0^e u \, dy = \frac{\rho g \sin \theta e^3}{3\mu} = \frac{4905 \times 8 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-3}} = 1,31 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s} = 13,1 \text{ L/s par m}$$

et la vitesse moyenne $U = q/e = 6,54 \text{ m/s} = \frac{2}{3} u_s$: on retrouve le rapport du demi-Poiseuille.

3. Nombre de Reynolds du film (longueur caractéristique e , ou $4e$ selon la convention du diamètre hydraulique d'un film large) :

$$Re = \frac{4 U e}{\nu} = \frac{4 \times 6,54 \times 2,0 \times 10^{-3}}{10^{-6}} = 5,2 \times 10^4 \gg 500$$

L'hypothèse laminaire n'est **pas vérifiée** : un film de 2 mm dévalant un coursier à 30° est en réalité turbulent, aéré, et sa vitesse réelle est bien plus faible que les 6,5 m/s calculés. **Morale de l'exercice** : une solution exacte de Navier–Stokes n'est valable que dans son domaine d'hypothèses ; le contrôle a posteriori du régime fait partie intégrante du calcul. (Le même calcul appliqué à un film d'huile visqueuse, ou à une lame d'eau de quelques dixièmes de millimètre, serait quantitativement correct.)

6.2 Régimes d'écoulement : expérience de Reynolds

6.2.1 L'expérience

Osborne Reynolds (1883) injecte un mince filet de colorant dans un tube de verre parcouru par de l'eau à vitesse réglable :

- à faible vitesse, le filet reste **rectiligne et net** : les particules glissent en couches parallèles sans se mélanger — régime **laminaire** ;
- à vitesse élevée, le filet oscille puis se **disperse dans toute la section** : le mouvement devient désordonné, avec des fluctuations tridimensionnelles et un brassage intense — régime **turbulent** ;
- entre les deux, une plage de **transition** instable.

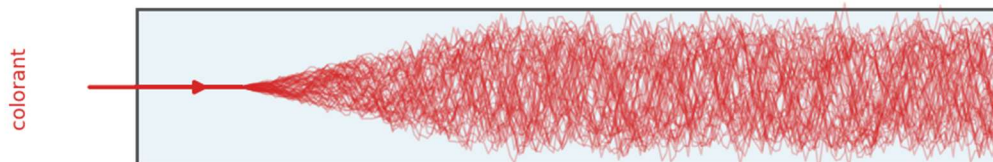
Laminaire $Re < 2000$ — filet rectiligne, couches non mélangées



Transition $2000 < Re < 4000$ — ondulations, bouffées intermittentes



Turbulent $Re > 4000$ — diffusion rapide du colorant



Expérience de Reynolds : aspect du filet coloré dans les trois régimes. Le passage laminaire → turbulent se traduit par une dispersion rapide du colorant dans toute la section.

6.2.2 Nombre de Reynolds

Le critère de passage est le **nombre de Reynolds**, rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité :

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu}$$

(V : vitesse moyenne ; D : diamètre ; ν : viscosité cinématique). Pour les conduites circulaires :

$Re < 2000$	laminaire
$2000 < Re < 4000$	transition
$Re > 4000$	turbulent

Ordre de grandeur. Eau à 20 °C ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), $D = 100 \text{ mm}$, $V = 1 \text{ m/s}$: $Re = 10^5$. Les écoulements de l'hydraulique urbaine sont **pratiquement toujours turbulents** ; le régime laminaire concerne les fluides très visqueux (huiles, boues), les milieux poreux et la microfluidique.

Pour les sections non circulaires, on utilise le **diamètre hydraulique** :

$$D_h = \frac{4S}{P_m}$$

(S : section mouillée, P_m : périmètre mouillé). On vérifie que $D_h = D$ pour le cercle.

6.3 Notion de perte de charge

6.3.1 Bernoulli généralisé

Entre deux sections 1 (amont) et 2 (aval) d'une conduite, la charge diminue de la **perte de charge** $\Delta H_{12} > 0$:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

α est le coefficient d'énergie cinétique de Coriolis, qui corrige l'emploi de la vitesse moyenne ($\alpha = 2$ en laminaire ; $\alpha \approx 1,05-1,10$ en turbulent : on prendra $\alpha = 1$ sauf indication contraire).

Avec une pompe (H_p) ou une turbine (H_t) :

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} + H_p = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g} + H_t + \Sigma \Delta H$$

Les pertes de charge se classent en :

- pertes **linéaires** (ou régulières, réparties) : dues au frottement le long des tronçons rectilignes ;
- pertes **singulières** (ou locales) : dues aux accidents de parcours (coudes, tés, vannes, changements de section, entrées et sorties).

6.3.2 Ligne de charge et ligne piézométrique

La ligne de charge descend régulièrement le long des tronçons (pente = perte de charge linéique j) et par décrochements au droit des singularités. La ligne piézométrique se trouve à $U^2/2g$ au-dessous. Ces tracés permettent de repérer immédiatement les zones en dépression (risque de cavitation ou de mise en dépression des réseaux).

6.4 Pertes de charge linéaires

6.4.1 Formule de Darcy–Weisbach

La perte de charge d'un tronçon rectiligne de longueur L et de diamètre D s'écrit :

$$\Delta H_L = \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$

λ (parfois noté f) est le **coefficient de perte de charge** (sans dimension). La perte de charge par unité de longueur, $j = \Delta H_L/L$, est la pente de la ligne de charge.

6.4.2 Régime laminaire : loi de Poiseuille

En régime laminaire, la résolution exacte des équations du mouvement (écoulement de Poiseuille) donne un profil de vitesse **parabolique**, une vitesse maximale double de la vitesse moyenne, et :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

La perte de charge est alors **proportionnelle à la vitesse** (et à la viscosité) et indépendante de la rugosité :

$$\Delta H_L = \frac{32 \nu L U}{g D^2} \quad \text{soit} \quad Q = \frac{\pi \Delta p D^4}{128 \mu L} \quad (\text{loi de Poiseuille})$$

6.4.3 Régime turbulent : rugosité et diagramme de Moody

En turbulent, λ dépend de Re et de la **rugosité relative** ε/D , où ε est la rugosité équivalente de la paroi. Valeurs indicatives de ε :

Matériau	ε (mm)
PVC, PEHD, verre	0,001 – 0,01
Acier neuf	0,05 – 0,1
Fonte ductile revêtue	0,1
Fonte ancienne, incrustée	1 – 3
Béton	0,3 – 3

La formule de référence est celle de **Colebrook–White** (1939), valable dans tout le domaine turbulent :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

Elle est implicite (λ figure des deux côtés) : on la résout par itérations, par le **diagramme de Moody** qui en est la représentation graphique, ou par des approximations explicites, dont celle de **Swamee-Jain** :

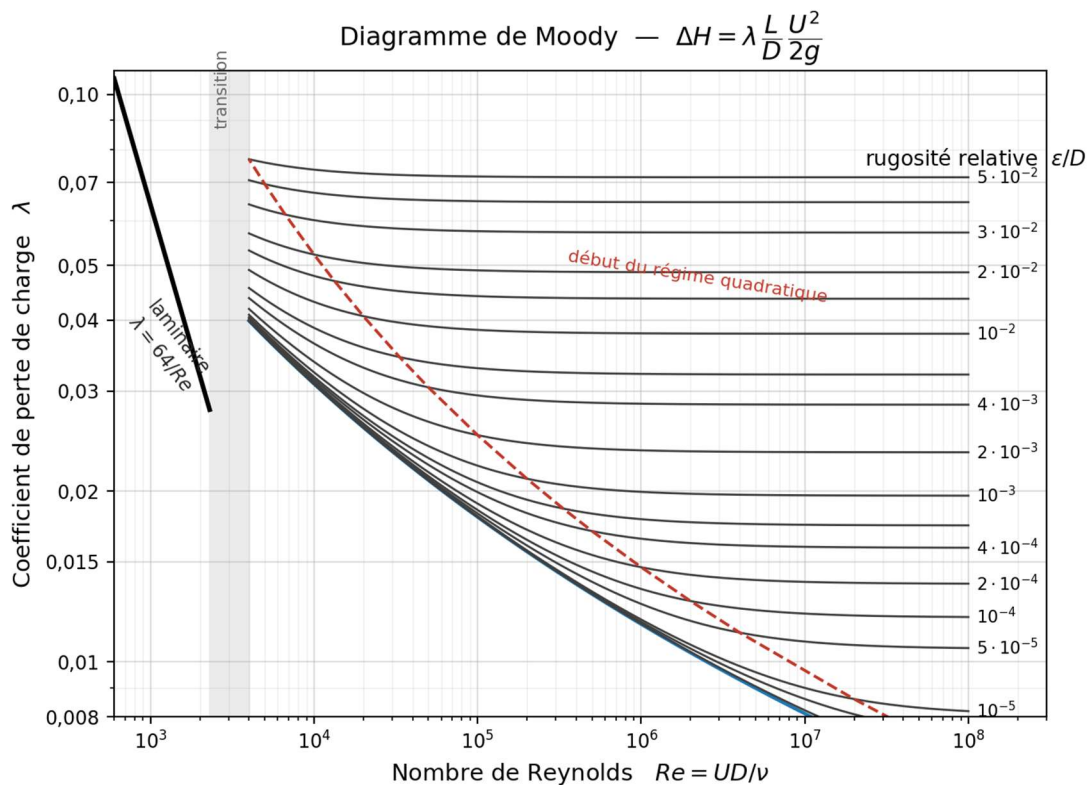


Diagramme de Moody en pleine page, pour la lecture graphique : entrer par Re en abscisse, suivre la courbe de rugosité relative, lire λ en ordonnée. À droite de la ligne tiretée, λ ne dépend plus que de ε/D .

$$\lambda = \frac{0,25}{\left[\log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3,71} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2}$$

Cas limites :

- *turbulent lisse* ($\varepsilon/D \rightarrow 0$) : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}}$; approximation de Blasius pour $Re < 10^5$: $\lambda = 0,316 Re^{-0,25}$;
- *turbulent rugueux* (grands Re) : λ ne dépend plus que de ε/D : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \frac{\varepsilon/D}{3,71}$; la perte de charge devient proportionnelle à U^2 (régime quadratique).

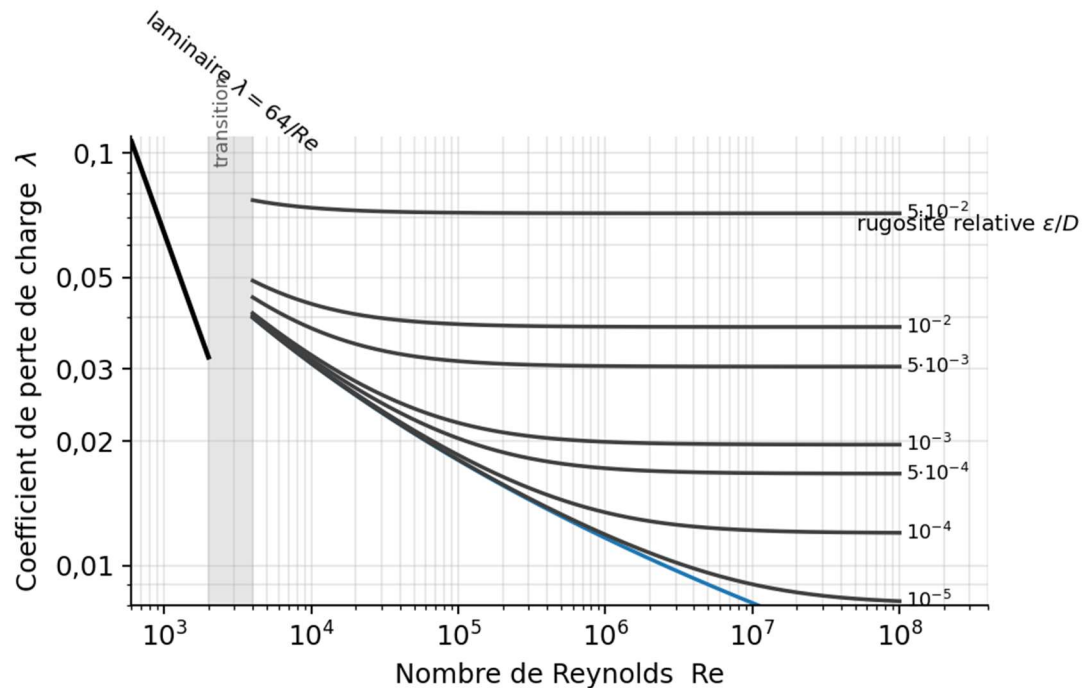


Diagramme de Moody : coefficient λ en fonction de Re pour différentes rugosités relatives ε/D . On y lit les trois régimes : laminaire ($64/Re$), turbulent lisse et turbulent rugueux.

6.4.4 Formules empiriques usuelles en réseau

Pour l'eau, la pratique utilise aussi des formules monomes calées expérimentalement, notamment **Hazen-Williams** (réseaux d'eau potable) et **Manning-Strickler** (écoulements à surface libre, mais aussi conduites) :

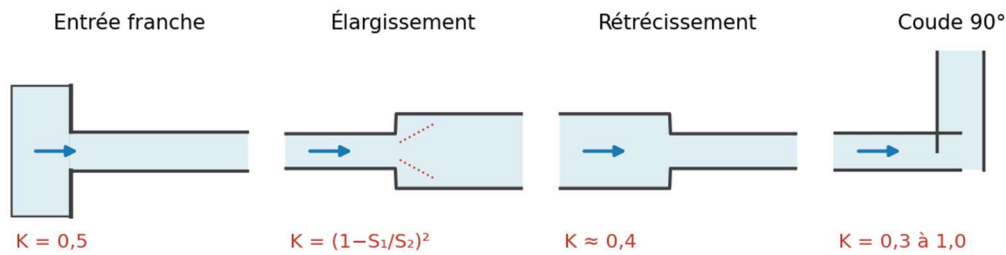
$$\text{Manning-Strickler: } U = K_s R_h^{2/3} i^{1/2}$$

(K_s : coefficient de Strickler, $R_h = S/P_m$: rayon hydraulique, i : pente de la ligne de charge). Ces formules seront exploitées au second semestre en hydraulique à surface libre.

6.5 Pertes de charge singulières

Chaque singularité provoque une perte localisée, proportionnelle à l'énergie cinétique :

Pertes de charge singulières : $\Delta H_s = K U^2 / 2g$



Principales singularités d'un réseau et ordres de grandeur du coefficient K . Sur les réseaux courts, ces pertes dominent souvent les pertes linéaires.

$$\Delta H_s = K \frac{U^2}{2g}$$

Coefficients K usuels (à rapporter à la vitesse indiquée) :

Singularité	K
Entrée à bord franc (réservoir → conduite)	0,5
Entrée profilée	0,05
Sortie dans un réservoir (perte d'énergie cinétique)	1,0
Coude 90° à rayon court	0,9 – 1,1
Coude 90° à grand rayon	0,2 – 0,4
Té (passage direct / dérivation)	0,3 / 1,0 – 1,5
Vanne opercule ouverte	0,1 – 0,2
Vanne à moitié fermée	2 – 5
Clapet de retenue	2 – 2,5
Crépine avec clapet	2 – 4

Élargissement brusque (formule de Borda-Carnot). Le théorème des quantités de mouvement appliqué à l'élargissement d'une section S_1 vers $S_2 > S_1$ donne :

$$\Delta H_s = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{U_1^2}{2g}$$

La sortie en réservoir en est le cas limite ($S_2 \rightarrow \infty, K = 1$).

Rétrécissement brusque : $K \approx 0,5 (1 - S_2/S_1)$ rapporté à la vitesse aval — la perte provient surtout du ré-élargissement après la section contractée.

Longueur équivalente. On remplace parfois une singularité par la longueur de conduite droite produisant la même perte : $L_{eq} = KD/\lambda$; les pertes singulières deviennent négligeables dès que la conduite est longue ($L \gg 1000 D$, cas des adductions).

6.6 Calcul pratique des conduites

Trois grands types de problèmes se présentent :

1. **Vérification** : Q, D, L connus $\rightarrow$ calculer ΔH (direct : Re , puis λ , puis Darcy).
2. **Débitance** : $\Delta H, D, L$ connus $\rightarrow$ calculer Q (itératif : λ dépend de Re donc de l'inconnue U).
3. **Dimensionnement** : $Q, \Delta H$ disponibles, L connus $\rightarrow$ choisir D (itératif, puis arrondi au diamètre commercial supérieur : 60, 80, 100, 125, 150, 200, 250, 300, 350, 400 mm...).

Vitesses recommandées en réseau de distribution : 0,5 à 1,5 m/s (limiter pertes de charge, bruit, coups de bélier, sans favoriser les dépôts).

6.7 Exercices résolus

6.7.1 Exercice 6.1 — Régime d'écoulement

Déterminer le régime d'écoulement dans les cas suivants : a) eau à 20 °C ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), $D = 80 \text{ mm}$, $Q = 3 \text{ L/s}$; b) huile ($\nu = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$), $D = 80 \text{ mm}$, même débit ; c) eau, gaine rectangulaire $200 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$, $U = 0,5 \text{ m/s}$.

Solution.

$$\text{a) } U = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0,003}{\pi \times 0,080^2} = 0,597 \text{ m/s.}$$

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{0,597 \times 0,080}{10^{-6}} = 47\,700 \Rightarrow \text{turbulent}$$

b) Même vitesse :

$$Re = \frac{0,597 \times 0,080}{2 \times 10^{-4}} = 239 \Rightarrow \text{laminaire}$$

c) Diamètre hydraulique :

$$D_h = \frac{4S}{P_m} = \frac{4 \times 0,200 \times 0,050}{2(0,200 + 0,050)} = \frac{0,040}{0,500} = 0,080 \text{ m}$$

$$Re = \frac{0,5 \times 0,080}{10^{-6}} = 40\,000 \Rightarrow \text{turbulent}$$

6.7.2 Exercice 6.2 — Écoulement laminaire d'une huile

Une huile ($\rho = 900 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0,18 \text{ Pa}\cdot\text{s}$) circule dans une conduite horizontale de diamètre $D = 50 \text{ mm}$ et de longueur $L = 300 \text{ m}$, au débit $Q = 1,2 \text{ L/s}$. 1. Vérifier le régime. 2. Calculer λ , la perte de charge et la chute de pression. 3. Calculer la puissance dissipée.

Solution.

$$1. \quad U = \frac{4 \times 0,0012}{\pi \times 0,050^2} = 0,611 \text{ m/s}; \quad \nu = \mu/\rho = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}.$$

$$Re = \frac{0,611 \times 0,050}{2 \times 10^{-4}} = 153 < 2000 \Rightarrow \text{laminaire}$$

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{153} = 0,419$$

$$\Delta H = \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = 0,419 \times \frac{300}{0,050} \times \frac{0,611^2}{19,62} = 0,419 \times 6000 \times 0,0190 = 47,8 \text{ m d'huile}$$

$$\Delta p = \rho g \Delta H = 900 \times 9,81 \times 47,8 = 4,22 \times 10^5 \text{ Pa} \approx 4,22 \text{ bar}$$

$$P = \Delta p \times Q = 4,22 \times 10^5 \times 0,0012 = 507 \text{ W}$$

Les fluides visqueux coûtent cher à transporter : plus de 500 W dissipés pour 1,2 L/s seulement.

6.7.3 Exercice 6.3 — Perte de charge en régime turbulent (Colebrook)

De l'eau à 20°C circule à $Q = 50 \text{ L/s}$ dans une conduite en fonte ($\varepsilon = 0,25 \text{ mm}$) de diamètre $D = 200 \text{ mm}$ et de longueur $L = 850 \text{ m}$. Calculer la perte de charge linéaire.

Solution.

Vitesse et Reynolds :

$$U = \frac{4 \times 0,050}{\pi \times 0,200^2} = 1,59 \text{ m/s}; \quad Re = \frac{1,59 \times 0,200}{10^{-6}} = 3,18 \times 10^5$$

Rugosité relative : $\varepsilon/D = 0,25/200 = 1,25 \times 10^{-3}$.

Colebrook par itérations. Initialisation (Swamee–Jain) :

$$\lambda_0 = \frac{0,25}{\left[\log_{10} \left(\frac{1,25 \times 10^{-3}}{3,71} + \frac{5,74}{(3,18 \times 10^5)^{0,9}} \right) \right]^2} = \frac{0,25}{[\log_{10}(3,37 \times 10^{-4} + 6,30 \times 10^{-5})]^2}$$

$$= \frac{0,25}{(-3,398)^2} = 0,0217$$

Itération de Colebrook avec $\lambda_0 = 0,0217$ ($\sqrt{\lambda_0} = 0,1472$) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{1,25 \times 10^{-3}}{3,71} + \frac{2,51}{3,18 \times 10^5 \times 0,1472} \right)$$

$$= -2 \log_{10}(3,37 \times 10^{-4} + 5,36 \times 10^{-5}) = 6,82$$

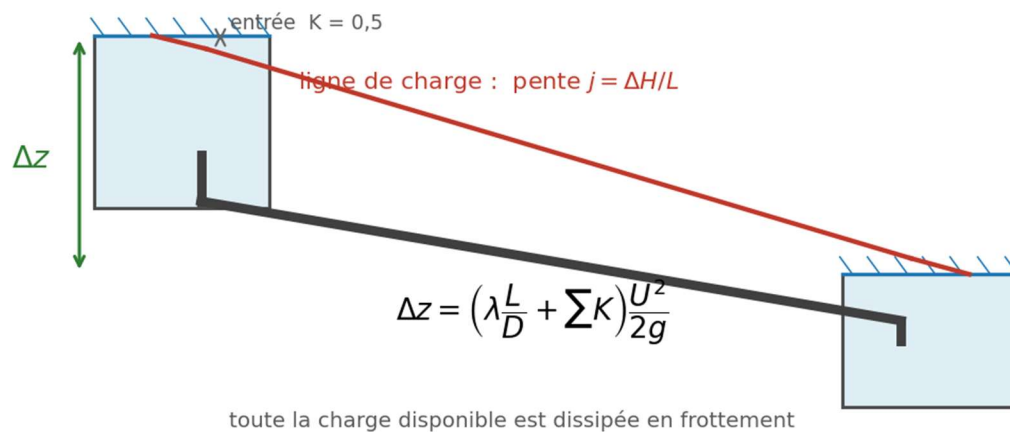
$\lambda = 1/6,82^2 = 0,0215$ — convergence immédiate. Retenons $\lambda = 0,0215$.

Perte de charge :

$$\Delta H = \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = 0,0215 \times \frac{850}{0,200} \times \frac{1,59^2}{19,62} = 0,0215 \times 4250 \times 0,1288 = 11,8 \text{ m}$$

Soit une perte de charge linéique $j = 11,8/850 = 13,9 \text{ m/km}$ — valeur élevée, typique d'une vitesse de 1,6 m/s en diamètre 200.

6.7.4 Exercice 6.4 — Conduite gravitaire entre deux réservoirs



Écoulement gravitaire entre deux réservoirs : la dénivelée disponible est intégralement consommée par les pertes linéaires et singulières ; la ligne de charge descend de l'amont vers l'aval.

Deux réservoirs à surface libre sont reliés par une conduite en fonte ($\varepsilon = 0,25 \text{ mm}$) de diamètre $D = 150 \text{ mm}$ et de longueur $L = 1200 \text{ m}$. La dénivelée entre les plans d'eau est

$\Delta z = 18,0 \text{ m}$. Les pertes singulières totalisent $\Sigma K = 4,5$ (entrée 0,5 + vanne 0,3 + coudes 2,7 + sortie 1,0). Calculer le débit transitant. ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.)

Solution.

Bernoulli entre les deux surfaces libres (vitesses et pressions relatives nulles) :

$$\Delta z = \left(\lambda \frac{L}{D} + \Sigma K \right) \frac{U^2}{2g}$$

C'est un problème de débitance : λ dépend de U inconnue $\rightarrow$ itérations.

Itération 1. Supposons le régime turbulent rugueux : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \frac{\varepsilon/D}{3,71}$ avec $\varepsilon/D = 1,667 \times 10^{-3}$:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10}(4,49 \times 10^{-4}) = 6,695 \Rightarrow \lambda_1 = 0,0223$$

$$U_1 = \sqrt{\frac{2g \Delta z}{\lambda_1 L/D + \Sigma K}} = \sqrt{\frac{19,62 \times 18,0}{0,0223 \times 8000 + 4,5}} = \sqrt{\frac{353,2}{182,9}} = 1,39 \text{ m/s}$$

Itération 2. $Re = \frac{1,39 \times 0,150}{10^{-6}} = 2,08 \times 10^5$. Colebrook :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(4,49 \times 10^{-4} + \frac{2,51}{2,08 \times 10^5 \sqrt{\lambda_1}} \right)$$

Avec $\sqrt{\lambda_1} = 0,1493$: terme visqueux = $8,08 \times 10^{-5}$;

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10}(5,30 \times 10^{-4}) = 6,55 \Rightarrow \lambda_2 = 0,0233$$

$$U_2 = \sqrt{\frac{353,2}{0,0233 \times 8000 + 4,5}} = \sqrt{\frac{353,2}{190,9}} = 1,36 \text{ m/s}$$

Itération 3. $Re = 2,04 \times 10^5 \rightarrow \lambda_3 \approx 0,0233$: convergence.

Débit :

$$Q = U \frac{\pi D^2}{4} = 1,36 \times 1,767 \times 10^{-2} = 2,40 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} \approx 24 \text{ L/s}$$

Vérification du poids des pertes singulières : $\Sigma K = 4,5$ contre $\lambda L/D = 186$: elles représentent 2,4 % du total — négligeables, comme attendu pour une conduite longue.

6.7.5 Exercice 6.5 — Dimensionnement d'une adduction gravitaire

On veut transiter $Q = 60 \text{ L/s}$ entre deux réservoirs distants de $L = 2500 \text{ m}$ avec une dénivelée disponible $\Delta z = 22 \text{ m}$. Conduite en fonte revêtue ($\varepsilon = 0,1 \text{ mm}$) ; pertes singulières négligées. Déterminer le diamètre commercial à retenir (série : 150, 200, 250, 300 mm) et la vitesse correspondante.

Solution.

Il faut $\Delta H(D) \leq 22 \text{ m}$. Testons $D = 200 \text{ mm}$:

$$U = \frac{4 \times 0,060}{\pi \times 0,04} = 1,91 \text{ m/s}; \quad Re = 3,82 \times 10^5; \quad \varepsilon/D = 5 \times 10^{-4}$$

Swamee-Jain :

$$\lambda = \frac{0,25}{[\log_{10}(1,35 \times 10^{-4} + 5,42 \times 10^{-5})]^2} = \frac{0,25}{(-3,723)^2} = 0,0180$$

$$\Delta H = 0,0180 \times \frac{2500}{0,200} \times \frac{1,91^2}{19,62} = 0,0180 \times 12\,500 \times 0,186 = 41,9 \text{ m} > 22 \text{ m}$$

$\Rightarrow$ insuffisant

Testons $D = 250 \text{ mm}$:

$$U = \frac{4 \times 0,060}{\pi \times 0,0625} = 1,22 \text{ m/s}; \quad Re = 3,06 \times 10^5; \quad \varepsilon/D = 4 \times 10^{-4}$$

$$\lambda = \frac{0,25}{[\log_{10}(1,08 \times 10^{-4} + 6,62 \times 10^{-5})]^2} = \frac{0,25}{(-3,759)^2} = 0,0177$$

$$\Delta H = 0,0177 \times \frac{2500}{0,250} \times \frac{1,22^2}{19,62} = 0,0177 \times 10\,000 \times 0,0759 = 13,4 \text{ m} < 22 \text{ m}$$

$\Rightarrow$ convient

On retient DN 250 : $U = 1,22 \text{ m/s}$ (dans la plage recommandée), avec une réserve de charge de 8,6 m qui pourra absorber le vieillissement de la conduite (augmentation de ε) ou être dissipée dans une vanne de régulation. Le DN 200 imposerait une pompe ; le DN 300 serait surdimensionné et plus coûteux.

6.7.6 Exercice 6.6 — Installation de pompage complète

Une pompe refoule $Q = 25 \text{ L/s}$ d'une bache (plan d'eau cote 2,0 m) vers un réservoir (plan d'eau cote 48,0 m). Aspiration : $D_a = 150 \text{ mm}$, $L_a = 8 \text{ m}$, $\sum K_a = 4,0$ (crépine + clapet + coude). Refoulement : $D_r = 125 \text{ mm}$, $L_r = 620 \text{ m}$, $\sum K_r = 3,5$. Conduites en fonte, on

prendra $\lambda = 0,022$ partout. 1. Calculer la hauteur manométrique totale (HMT) de la pompe. 2. Calculer la puissance absorbée pour un rendement de pompe de 72 %.

Solution.

Vitesses :

$$U_a = \frac{4 \times 0,025}{\pi \times 0,150^2} = 1,41 \text{ m/s}; \quad U_r = \frac{4 \times 0,025}{\pi \times 0,125^2} = 2,04 \text{ m/s}$$

Pertes de charge à l'aspiration :

$$\Delta H_a = \left(0,022 \times \frac{8}{0,150} + 4,0 \right) \frac{1,41^2}{19,62} = (1,17 + 4,0) \times 0,1015 = 0,52 \text{ m}$$

Pertes de charge au refoulement :

$$\Delta H_r = \left(0,022 \times \frac{620}{0,125} + 3,5 \right) \frac{2,04^2}{19,62} = (109,1 + 3,5) \times 0,2122 = 23,9 \text{ m}$$

1. Bernoulli généralisé entre les deux plans d'eau :

$$H_{MT} = (z_2 - z_1) + \Delta H_a + \Delta H_r = 46,0 + 0,52 + 23,9 = 70,4 \text{ m}$$

2. Puissances :

$$P_h = \rho g Q H_{MT} = 1000 \times 9,81 \times 0,025 \times 70,4 = 17\,266 \text{ W} \approx 17,3 \text{ kW}$$

$$P_{abs} = \frac{P_h}{\eta} = \frac{17,3}{0,72} = 24,0 \text{ kW}$$

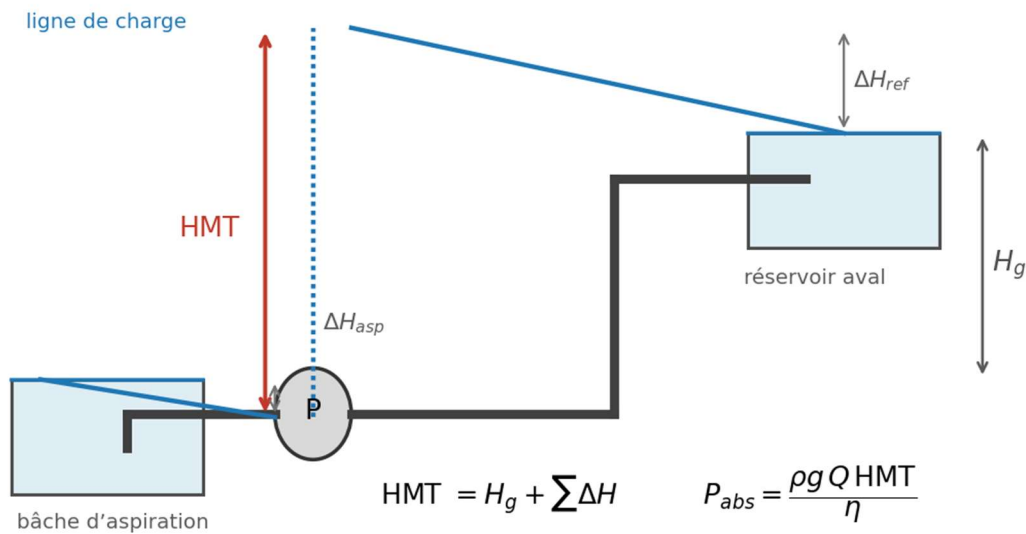


Schéma énergétique d'une station de pompage : la hauteur manométrique totale cumule la hauteur géométrique et l'ensemble des pertes de charge de l'aspiration et du refoulement.

Les pertes de charge (24,4 m) représentent ici plus du tiers de la HMT : un refoulement en DN 150 ($U = 1,41$ m/s, $\Delta H_r \approx 9,8$ m) réduirait la puissance d'environ 20 % — illustration de l'arbitrage économique investissement/énergie qui gouverne le choix des diamètres de refoulement.

6.7.7 Exercice 6.7 — Élargissement brusque (Borda–Carnot)

Une conduite passe brusquement du diamètre $D_1 = 100$ mm au diamètre $D_2 = 200$ mm. Le débit vaut $Q = 15$ L/s. 1. Calculer la perte de charge singulière. 2. Calculer la variation de pression à travers l'élargissement (conduite horizontale) et commenter.

Solution.

Vitesses :

$$U_1 = \frac{4 \times 0,015}{\pi \times 0,01} = 1,91 \text{ m/s}; \quad U_2 = \frac{U_1}{4} = 0,477 \text{ m/s}$$

1. Borda–Carnot :

$$\Delta H_s = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g} = \frac{(1,91 - 0,477)^2}{19,62} = \frac{2,054}{19,62} = 0,105 \text{ m}$$

2. Bernoulli généralisé entre 1 et 2 :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} - \Delta H_s = \frac{1,91^2 - 0,477^2}{19,62} - 0,105 = 0,174 - 0,105 = 0,069 \text{ m}$$

$$p_2 - p_1 = 9810 \times 0,069 = +677 \text{ Pa}$$

La pression **augmente** à travers l'élargissement (ralentissement du fluide : récupération de pression), mais la récupération n'est que partielle : sans perte, elle aurait atteint 0,174 mCE ; l'élargissement brusque en dissipe 60 %. Un divergent progressif (angle total $\leq 8^\circ$) récupérerait presque tout — c'est la fonction du diffuseur d'un venturi.

7 Analyse dimensionnelle et similitude

De nombreux problèmes d'hydraulique (ouvrages, houle, transport solide, cavitation) échappent au calcul direct : on les étudie sur **modèle réduit** en laboratoire. L'analyse dimensionnelle fournit les règles de construction et d'exploitation de ces modèles, et permet plus généralement de réduire le nombre de variables d'un problème.

7.1 Dimensions et homogénéité

7.1.1 Dimensions fondamentales

En mécanique, trois dimensions fondamentales suffisent : la masse M , la longueur L et le temps T . Toute grandeur mécanique a une **équation aux dimensions** de la forme $M^a L^b T^c$:

Grandeur	Dimension	Grandeur	Dimension
Vitesse	LT^{-1}	Masse volumique	ML^{-3}
Accélération	LT^{-2}	Viscosité dynamique μ	$ML^{-1}T^{-1}$
Force	MLT^{-2}	Viscosité cinématique ν	L^2T^{-1}
Pression, contrainte	$ML^{-1}T^{-2}$	Tension superficielle σ	MT^{-2}
Énergie, travail	ML^2T^{-2}	Débit volumique	L^3T^{-1}
Puissance	ML^2T^{-3}	Poids volumique	$ML^{-2}T^{-2}$

7.1.2 Principe d'homogénéité

Toute équation physique doit être **dimensionnellement homogène** : ses deux membres, et chacun de ses termes additifs, ont la même dimension. C'est un puissant outil de vérification des calculs, et le fondement de l'analyse dimensionnelle.

7.2 Théorème de Vaschy–Buckingham (théorème des π)

Énoncé. Si un phénomène physique est régi par une relation entre n grandeurs faisant intervenir k dimensions fondamentales, cette relation peut se ramener à une relation entre $n - k$ produits sans dimension indépendants $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}$:

$$f(g_1, \dots, g_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\pi_1, \dots, \pi_{n-k}) = 0$$

Mode opératoire.

1. Recenser les n grandeurs pertinentes du problème (c'est l'étape physique, la plus délicate).
2. Compter les dimensions fondamentales mises en jeu ($k = 3$ en général).
3. Choisir k grandeurs « répétitives » dimensionnellement indépendantes (typiquement une longueur, une vitesse, une masse volumique).
4. Former chaque π_j comme le produit des grandeurs répétitives affectées d'exposants inconnus par l'une des grandeurs restantes, et déterminer les exposants en écrivant que π_j est sans dimension.
5. Écrire la relation finale entre les π_j ; l'expérience (ou la théorie) précisera la fonction φ .

7.3 Nombres sans dimension de l'hydraulique

Les principaux groupements sans dimension comparent les forces d'inertie aux autres forces en présence :

Nombre	Expression	Rapport de forces	Domaine
Reynolds	$Re = \frac{VL}{\nu}$	inertie / viscosité	conduites, couches limites
Froude	$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$	inertie / pesanteur	surface libre, houle, ouvrages
Euler	$Eu = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$	pression / inertie	pertes de charge, cavitation
Mach	$Ma = \frac{V}{c}$	inertie / compressibilité	gaz, coups de bélier
Weber	$We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$	inertie / tension superficielle	gouttes, très petits modèles

En hydraulique à surface libre, le nombre de Froude distingue les régimes **fluvial** ($Fr < 1$), **critique** ($Fr = 1$) et **torrentiel** ($Fr > 1$) — notion développée au semestre suivant.

7.4 Similitude et modèles réduits

7.4.1 Les trois similitudes

Un modèle (indice m) représente fidèlement un prototype (indice p) si trois similitudes sont satisfaites :

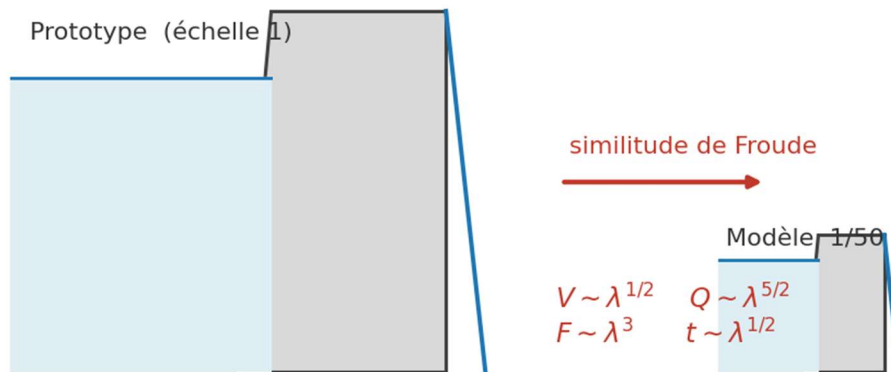
- **géométrique** : rapport d'échelle constant $\lambda_\ell = L_m/L_p$ (formes homothétiques, y compris, en toute rigueur, les rugosités) ;
- **cinématique** : les vitesses homologues sont dans un rapport constant (trajectoires semblables) ;
- **dynamique** : les forces homologues sont dans un rapport constant — condition remplie lorsque les nombres sans dimension pertinents sont **égaux** sur modèle et prototype.

7.4.2 Incompatibilité de Reynolds et Froude

L'égalité simultanée $Re_m = Re_p$ et $Fr_m = Fr_p$ avec le même fluide exigerait $\lambda_\ell = 1$: impossible sur modèle réduit. On respecte donc la similitude **dominante** :

- écoulements en charge, sans surface libre : similitude de **Reynolds** — ou, plus souvent, on s'assure seulement que le modèle est en régime turbulent rugueux, où λ devient indépendant de Re (**similitude automatique**) ;
- écoulements à surface libre (barrages, évacuateurs, ports, canaux) : similitude de **Froude**, la pesanteur étant la force motrice dominante ; on vérifie a posteriori que les effets visqueux et capillaires restent négligeables sur le modèle (Re_m assez grand, profondeurs > 3 cm environ).

7.4.3 Échelles dérivées en similitude de Froude



Étude sur modèle réduit en similitude de Froude : chaque grandeur se transpose du modèle au prototype par une puissance de l'échelle géométrique.

De $Fr_m = Fr_p$ avec $g_m = g_p$, on tire $V_m/V_p = \lambda_\ell^{1/2}$, puis :

Grandeur	Échelle	
Longueur		λ_ℓ
Vitesse		$\lambda_\ell^{1/2}$
Temps		$\lambda_\ell^{1/2}$
Débit		$\lambda_\ell^{5/2}$
Force	λ_ℓ^3 (même fluide)	
Pression		λ_ℓ
Puissance		$\lambda_\ell^{7/2}$

7.5 Exercices résolus

7.5.1 Exercice 7.1 — Vérification d'homogénéité

Vérifier l'homogénéité : a) de la formule de Torricelli $V = \sqrt{2gh}$; b) de la formule de Darcy-Weisbach ; c) de la loi de Jurin.

Solution.

a) $[\sqrt{gh}] = (LT^{-2} \cdot L)^{1/2} = LT^{-1} = [V] \checkmark$

$$\text{b) } \left[\lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \right] = 1 \cdot 1 \cdot \frac{L^2 T^{-2}}{L T^{-2}} = L : \text{homogène à une longueur, comme } \Delta H \checkmark$$

$$\text{c) } \left[\frac{\sigma}{\rho g r} \right] = \frac{M T^{-2}}{M L^{-3} \cdot L T^{-2} \cdot L} = \frac{M T^{-2}}{M L^{-1} T^{-2}} = L \checkmark$$

7.5.2 Exercice 7.2 — Perte de charge par le théorème des π

La chute de pression par unité de longueur $\Delta p/L$ dans une conduite dépend de D, U, ρ, μ et ε . Montrer par le théorème de Vaschy–Buckingham que la relation se réduit à la forme de Darcy–Weisbach.

Solution.

Grandeurs : $\Delta p/L, D, U, \rho, \mu, \varepsilon \rightarrow n = 6$; dimensions $M, L, T \rightarrow k = 3$; il existe $6 - 3 = 3$ produits sans dimension. Grandeurs répétitives : ρ, U, D .

$$\pi_1 \text{ avec } \Delta p/L : \pi_1 = \frac{\Delta p}{L} \rho^a U^b D^c. \text{ Dimensions : } [\Delta p/L] = M L^{-2} T^{-2} ;$$

$$M: 1 + a = 0; \quad T: -2 - b = 0; \quad L: -2 - 3a + b + c = 0$$

d'où $a = -1, b = -2, c = 1$:

$$\pi_1 = \frac{\Delta p D}{L \rho U^2}$$

$$\pi_2 \text{ avec } \mu : \text{le même calcul donne } \pi_2 = \frac{\mu}{\rho U D} = \frac{1}{Re}.$$

$$\pi_3 \text{ avec } \varepsilon : \pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} \text{ (rugosité relative).}$$

Relation finale :

$$\frac{\Delta p D}{L \rho U^2} = \varphi \left(Re, \frac{\varepsilon}{D} \right) \Leftrightarrow \Delta p = \lambda(Re, \varepsilon/D) \frac{L}{D} \frac{\rho U^2}{2}$$

en posant $\lambda = 2\varphi$. L'analyse dimensionnelle retrouve la **structure** de Darcy–Weisbach et montre que λ ne peut dépendre que de Re et ε/D — exactement ce qu'exprime le diagramme de Moody. La forme de φ (Colebrook) reste à déterminer par l'expérience.

7.5.3 Exercice 7.3 — Traînée d'une pile de pont

La force de traînée F exercée par un courant sur une pile de pont cylindrique dépend du diamètre D , de la vitesse V , de la masse volumique ρ et de la viscosité μ . 1. Établir la forme adimensionnelle de F . 2. Des essais sur modèle au 1/20 en similitude de Reynolds dans l'eau donnent $F_m = 12 \text{ N}$; quelle est la force sur le prototype ?

Solution.

1. $n = 5, k = 3 \rightarrow 2$ produits. Avec ρ, V, D répétitives :

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2} = C_x, \quad \pi_2 = \frac{1}{Re}$$

$$\boxed{F = \rho V^2 D^2 \phi(Re)}$$

(Pour un cylindre de hauteur h , on écrit classiquement $F = \frac{1}{2} C_x \rho V^2 (Dh)$ avec C_x fonction de Re .)

2. Similitude de Reynolds, même fluide : $V_m D_m = V_p D_p$, donc $V_m = 20 V_p$. Rapport des forces :

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{\rho V_p^2 D_p^2}{\rho V_m^2 D_m^2} = \left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2 \left(\frac{D_p}{D_m}\right)^2 = \left(\frac{1}{20}\right)^2 \times 20^2 = 1$$

$$F_p = F_m = 12 \text{ N}$$

Résultat remarquable : en similitude de Reynolds avec le même fluide, les forces sont **identiques** sur modèle et prototype. Le prix à payer est une vitesse d'essai 20 fois plus grande — souvent irréalisable, ce qui explique le recours à la similitude automatique en turbulent rugueux.

7.5.4 Exercice 7.4 — Modèle réduit d'évacuateur de crues (Froude)

L'évacuateur de crues d'un barrage doit transiter $Q_p = 1800 \text{ m}^3/\text{s}$. On l'étudie sur un modèle au 1/50 en similitude de Froude. 1. Calculer le débit à installer sur le modèle. 2. Sur le modèle, la vitesse en pied de coursier vaut $V_m = 1,70 \text{ m/s}$ et une durée de 2 min est observée pour un phénomène transitoire. Quelles sont les valeurs correspondantes sur le prototype ? 3. La force mesurée sur un élément du bassin de dissipation vaut $F_m = 85 \text{ N}$. Quelle est la force réelle ?

Solution.

Échelle $\lambda_\ell = 1/50$.

1. Débit : échelle $\lambda_\ell^{5/2}$:

$$Q_m = Q_p \lambda_\ell^{5/2} = 1800 \times \left(\frac{1}{50}\right)^{5/2} = \frac{1800}{50^{2,5}} = \frac{1800}{17\,678} = 0,1018 \text{ m}^3/\text{s} \approx 102 \text{ L/s}$$

Un débit de laboratoire tout à fait praticable — c'est l'intérêt de l'échelle 1/50.

2. Vitesse : échelle $\lambda_\rho^{1/2}$:

$$V_p = V_m \sqrt{50} = 1,70 \times 7,07 = 12,0 \text{ m/s}$$

Temps : même échelle $\lambda_\rho^{1/2}$:

$$t_p = t_m \sqrt{50} = 2 \times 7,07 = 14,1 \text{ min}$$

3. Force : échelle λ_ρ^3 (même fluide) :

$$F_p = F_m \times 50^3 = 85 \times 125\,000 = 1,06 \times 10^7 \text{ N} \approx 10,6 \text{ MN}$$

7.5.5 Exercice 7.5 — Chute d'une bille : mesure de viscosité (Stokes)

Une bille d'acier ($\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$) de diamètre $d = 3 \text{ mm}$ tombe à vitesse limite constante $V = 0,12 \text{ m/s}$ dans une huile ($\rho = 890 \text{ kg/m}^3$). En régime de Stokes, la traînée vaut $F = 3\pi\mu Vd$. 1. Établir l'expression de la viscosité. 2. Calculer μ et vérifier la validité du régime de Stokes ($Re < 1$).

Solution.

1. À vitesse limite, l'équilibre poids – poussée d'Archimède – traînée s'écrit :

$$(\rho_s - \rho) g \frac{\pi d^3}{6} = 3\pi\mu Vd \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{(\rho_s - \rho) g d^2}{18 V}}$$

2. Application numérique :

$$\mu = \frac{(7850 - 890) \times 9,81 \times (3 \times 10^{-3})^2}{18 \times 0,12} = \frac{6960 \times 9,81 \times 9 \times 10^{-6}}{2,16} = 0,284 \text{ Pa s}$$

Vérification :

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{890 \times 0,12 \times 3 \times 10^{-3}}{0,284} = 1,13$$

$Re \approx 1$: on est à la limite de validité de la loi de Stokes ; la valeur trouvée est acceptable en première approximation, mais une correction (Oseen) serait justifiée pour une mesure précise. C'est le principe du **viscosimètre à chute de bille**.

8 Introduction aux écoulements à surface libre — Équations de Saint-Venant

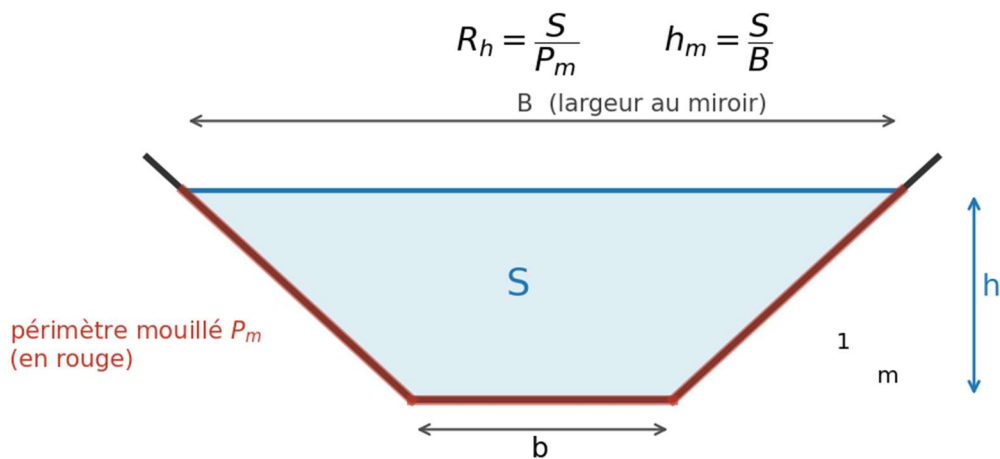
Les chapitres précédents traitent des écoulements **en charge** : le fluide remplit toute la conduite et la pression est l'inconnue motrice. Dans les canaux, rivières, caniveaux, réseaux d'assainissement et ouvrages hydrauliques, l'écoulement présente une **surface libre** au contact de l'atmosphère : la géométrie mouillée devient elle-même une inconnue. Ce chapitre introduit les notions indispensables et établit les **équations de Barré de Saint-Venant** (1871), socle de toute l'hydraulique fluviale et urbaine moderne — elles seront exploitées en détail dans les cours d'hydraulique générale et d'hydraulique urbaine des semestres suivants.

8.1 Grandeurs géométriques et hydrauliques

Pour une section transversale d'écoulement de profondeur h :

- **section mouillée** S (m^2) : aire occupée par l'eau ;
- **périmètre mouillé** P_m (m) : longueur de paroi en contact avec l'eau (la surface libre n'en fait **pas** partie) ;
- **rayon hydraulique** $R_h = S/P_m$ (m) ;
- **largeur au miroir** B (m) : largeur de la surface libre ;
- **profondeur moyenne** $h_m = S/B$.

Pour un canal rectangulaire de largeur b : $S = bh$, $P_m = b + 2h$, $B = b$. Pour un canal **large** ($b \gg h$) : $R_h \approx h$.



Éléments géométriques d'une section à surface libre. Le périmètre mouillé n'inclut jamais la surface libre : c'est ce qui distingue le rayon hydraulique d'un canal de celui d'une conduite en charge.

La pression dans la section est **hydrostatique** dès lors que les filets sont quasi parallèles (courbure faible) : $p = \rho g(h - z)$ — hypothèse centrale de tout ce chapitre.

8.2 Célérité des ondes et nombre de Froude

Une perturbation de la surface libre (intumescence) se propage par rapport à l'eau à la **célérité** :

$$c = \sqrt{g h_m}$$

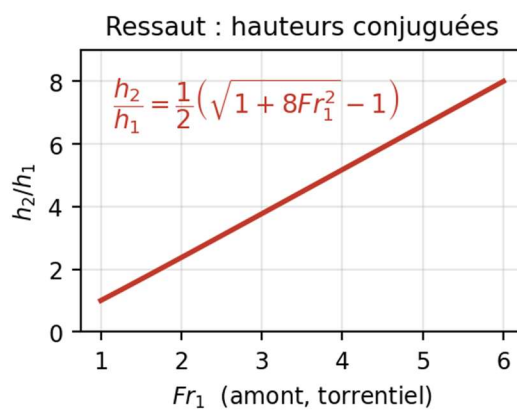
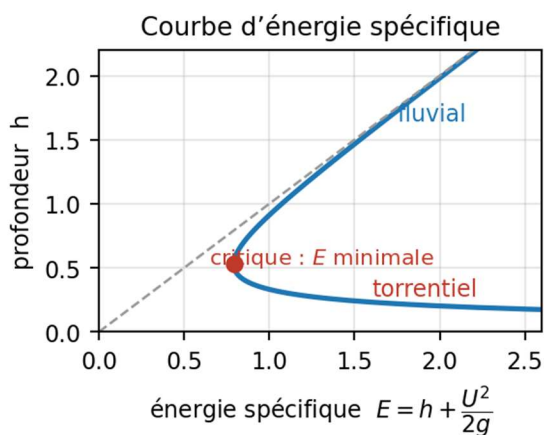
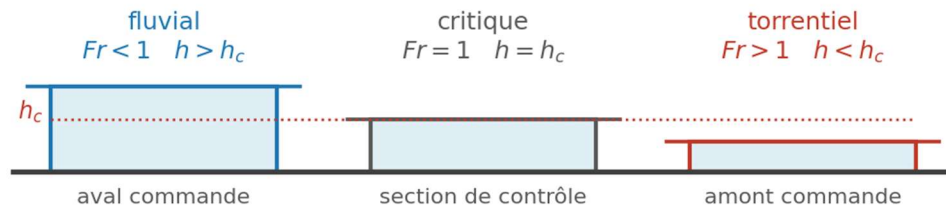
(h_m : profondeur moyenne). Le **nombre de Froude** compare la vitesse de l'écoulement à cette célérité :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g h_m}}$$

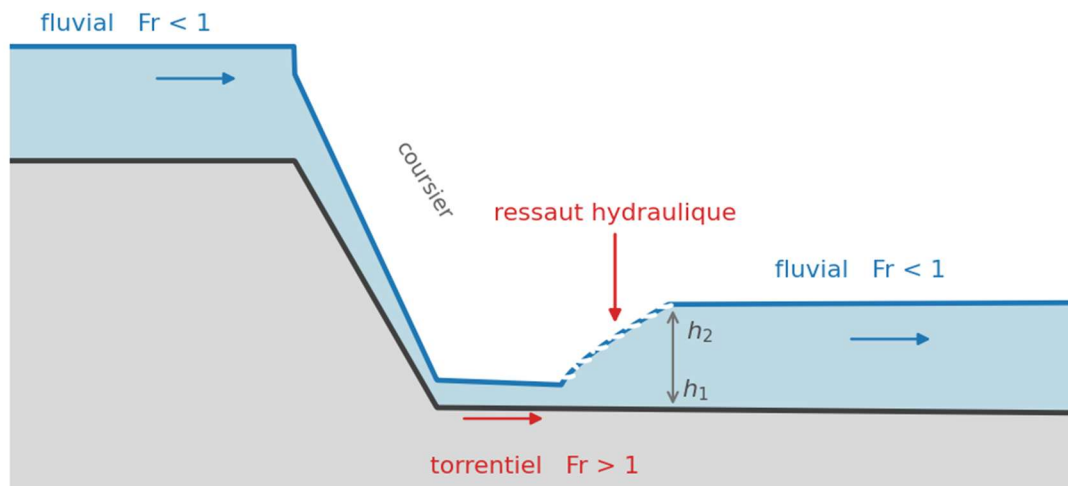
- $Fr < 1$: régime **fluvial** (subcritique). Les ondes remontent le courant : l'aval **commande** l'écoulement (les conditions à l'aval — barrage, confluence, marée — se font sentir vers l'amont).
- $Fr > 1$: régime **torrentiel** (supercritique). Aucune information ne remonte : l'amont commande.
- $Fr = 1$: régime **critique**, transition entre les deux, siège des sections de contrôle (déversoirs, seuils, chutes).

Le passage torrentiel → fluvial se fait par un **ressaut hydraulique**, discontinuité turbulente très dissipative, exploitée dans les bassins d'amortissement au pied des évacuateurs de crue.

Classification des régimes par le nombre de Froude



Synthèse des régimes à surface libre : classification par le Froude, courbe d'énergie spécifique (deux profondeurs possibles pour une même énergie) et relation des hauteurs conjuguées du ressaut.



Passage d'un bief fluvial à un radier aval via un coursier : l'écoulement devient torrentiel au pied de la chute, puis retrouve le régime fluvial par un ressaut hydraulique très dissipatif (hauteurs conjuguées h_1 et h_2).

Le nombre de Froude joue en surface libre le rôle que jouait le nombre de Reynolds pour la transition laminaire/turbulent : c'est **le** paramètre de classification des régimes — et l'on comprend rétrospectivement pourquoi la similitude des modèles réduits d'ouvrages hydrauliques (chapitre 7) se fait à Froude constant.

8.3 Écoulement uniforme : formule de Manning–Strickler

Lorsque le canal est prismatique, de pente de fond i constante, et que l'écoulement est permanent et **uniforme** (h constant le long du canal), le poids moteur équilibre exactement le frottement aux parois. La perte de charge par unité de longueur vaut alors la pente : $j = i$. La loi de frottement usuelle est la formule de **Manning–Strickler** :

$$\boxed{U = K R_h^{2/3} i^{1/2}} \quad \Leftrightarrow \quad Q = K S R_h^{2/3} i^{1/2}$$

où K ($\text{m}^{1/3}/\text{s}$) est le coefficient de Strickler ($K = 1/n$, inverse du coefficient de Manning n) :

Nature des parois	K ($\text{m}^{1/3}/\text{s}$)
Béton lissé, PVC	80 – 100
Béton ordinaire	65 – 75
Maçonnerie, béton grossier	50 – 60

Nature des parois	$K \text{ (m}^{1/3}/\text{s)}$
Terre régulière, canal entretenu	35 – 45
Rivière naturelle propre	25 – 35
Lit encombré, végétation dense	10 – 20

La profondeur qui s'établit en régime uniforme pour un débit donné s'appelle la **profondeur normale** h_n ; elle se calcule en résolvant (généralement par itération) $Q = K S(h) R_h(h)^{2/3} i^{1/2}$.

8.4 Les équations de Saint-Venant

8.4.1 Hypothèses

Les équations de Saint-Venant décrivent l'écoulement **non permanent** unidimensionnel à surface libre (propagation d'une crue, d'une onde de lâcher, remplissage d'un collecteur). Hypothèses :

1. écoulement **filaire** (1D) : grandeurs moyennées sur la section, décrites par $S(x, t)$ (ou $h(x, t)$) et $Q(x, t)$ (ou $U(x, t)$) ;
2. **pression hydrostatique** dans chaque section (courbures faibles : ondes **longues**, d'où le nom anglais *shallow water equations*) ;
3. pente de fond faible ($\sin \alpha \approx \tan \alpha = i$) ;
4. frottements en régime non permanent évalués par la loi du régime uniforme (Manning-Strickler) : pente de frottement $j = \frac{Q^2}{K^2 S^2 R_h^{4/3}}$;
5. eau incompressible, masse volumique constante.

8.4.2 Équation de continuité

Bilan de masse sur une tranche de canal comprise entre x et $x + dx$ pendant dt : la différence entre le débit entrant et le débit sortant fait varier le volume stocké $S dx$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_\ell$$

où q_ℓ (m^2/s) est l'éventuel apport latéral par unité de longueur (pluie, drains, déversements) — nul pour un bief sans apport. C'est l'équation de conservation du chapitre 3, adaptée au fait que la section S peut maintenant **varier dans le temps** : le canal stocke et déstocke de l'eau, c'est le mécanisme du laminage des crues.

8.4.3 Équation dynamique

Le théorème des quantités de mouvement (chapitre 5) appliqué à la même tranche — en comptant les forces de pression hydrostatique sur les deux faces, la composante motrice du poids ($\rho g S i dx$) et le frottement aux parois ($\rho g S j dx$) — conduit, après division par ρdx , à :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + g S \frac{\partial h}{\partial x} = g S (i - j)$$

ou, sous forme non conservative pour un canal rectangulaire large (par unité de largeur, $q = Uh$) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g (i - j)$$

Lecture terme à terme :

Terme	Signification
$\partial U / \partial t$	accélération locale (montée de crue)
$U \partial U / \partial x$	accélération convective
$g \partial h / \partial x$	force motrice due à la pente de la surface libre
$g i$	composante motrice du poids (pente du fond)
$-g j$	frottement (Manning–Strickler)

On reconnaît la structure des équations d'Euler/Navier–Stokes moyennées : Saint-Venant est à l'hydraulique à surface libre ce que Bernoulli généralisé est aux conduites — mais en conservant le caractère **non permanent**.

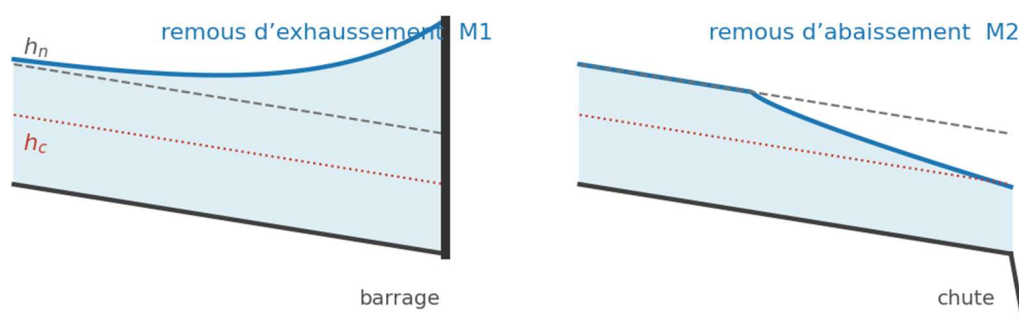
8.4.4 Hiérarchie des modèles simplifiés

Selon les termes que l'on néglige dans l'équation dynamique, on obtient la cascade de modèles utilisée en pratique :

- **Modèle complet (onde dynamique)** : tous les termes. Nécessaire pour les ondes de rupture de barrage, les influences aval marquées, les réseaux maillés (logiciels HEC-RAS, SWMM, Mike...).
- **Onde diffusante** : on néglige les termes d'inertie ($\partial U / \partial t$ et $U \partial U / \partial x$) ; il reste $\partial h / \partial x = i - j$. Bon compromis pour la propagation des crues naturelles.

- **Onde cinématique** : on néglige aussi $\partial h / \partial x$; il reste $j = i$, c'est-à-dire Manning-Strickler appliqué à chaque instant. Valable pour les pentes fortes ; c'est la base des méthodes de ruissellement urbain.
- **Régime permanent** ($\partial / \partial t = 0$) : on obtient l'équation de la **ligne d'eau** (courbes de remous) $\frac{dh}{dx} = \frac{i-j}{1-Fr^2}$, étudiée au semestre suivant — le dénominateur $1 - Fr^2$ montre le rôle charnière du régime critique.
- **Régime permanent uniforme** : $h = h_n$, Manning-Strickler seul.

Courbes de remous en régime fluvial : $\frac{dh}{dx} = \frac{i-j}{1-Fr^2}$



Deux courbes de remous classiques en régime fluvial : exhaussement à l'amont d'un barrage (M1) et abaissement à l'approche d'une chute (M2).

8.4.5 Caractère propagatif

Le système de Saint-Venant est **hyperbolique** : l'information se propage le long de deux familles de caractéristiques aux vitesses $U + c$ et $U - c$ (avec $c = \sqrt{gh_m}$). En fluvial ($U < c$), l'une remonte le courant — il faut donc une condition à la limite **aval** ; en torrentiel ($U > c$), les deux descendent — tout se prescrit à l'**amont**. Cette structure mathématique fonde à la fois les schémas numériques des logiciels d'hydraulique et les règles pratiques de calage des conditions aux limites.

8.5 Exercices résolus

8.5.1 Exercice 8.1 — Canal trapézoïdal en régime uniforme

Un canal d'irrigation trapézoïdal (largeur au fond $b = 2,0$ m, fruits des talus $3H/2V$ soit $m = 1,5$, revêtement béton ordinaire $K = 70$) a une pente $i = 0,0004$. Calculer le débit pour une profondeur $h = 1,20$ m, puis le nombre de Froude.

Solution.

Géométrie : $S = h(b + mh) = 1,20 \times (2,0 + 1,5 \times 1,20) = 1,20 \times 3,80 = 4,56 \text{ m}^2$. $P_m = b + 2h\sqrt{1 + m^2} = 2,0 + 2 \times 1,20 \times \sqrt{3,25} = 2,0 + 4,327 = 6,33 \text{ m}$. $R_h = 4,56/6,33 = 0,721 \text{ m}$.

$$Q = KSR_h^{2/3}i^{1/2} = 70 \times 4,56 \times 0,721^{2/3} \times 0,0004^{1/2} = 70 \times 4,56 \times 0,804 \times 0,020 = 5,13 \text{ m}^3/\text{s}$$

Vitesse : $U = Q/S = 1,13 \text{ m/s}$ (dans la plage recommandée pour un canal revêtu).

Largeur au miroir : $B = b + 2mh = 2,0 + 3,6 = 5,60 \text{ m}$; $h_m = S/B = 0,814 \text{ m}$.

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gh_m}} = \frac{1,13}{\sqrt{9,81 \times 0,814}} = \frac{1,13}{2,83} = 0,40 < 1$$

Régime **fluvial** : le canal est commandé par l'aval (prises, partiteurs).

8.5.2 Exercice 8.2 — Profondeur normale d'un collecteur rectangulaire

Un caniveau rectangulaire en béton lissé ($K = 85$) de largeur $b = 1,50 \text{ m}$ et de pente $i = 0,002$ doit évacuer $Q = 2,40 \text{ m}^3/\text{s}$. Calculer la profondeur normale h_n et vérifier le régime.

Solution.

Équation à résoudre : $Q = K(bh) \left(\frac{bh}{b+2h} \right)^{2/3} \sqrt{i}$, soit numériquement :

$$2,40 = 85 \times 1,5h \times \left(\frac{1,5h}{1,5 + 2h} \right)^{2/3} \times 0,0447$$

Itérons. Essai $h = 0,60 \text{ m}$: $S = 0,90$; $R_h = 0,90/2,70 = 0,333$; $Q = 85 \times 0,90 \times 0,481 \times 0,0447 = 1,64 \text{ m}^3/\text{s}$ (trop faible). Essai $h = 0,80 \text{ m}$: $S = 1,20$; $R_h = 1,20/3,10 = 0,387$; $Q = 85 \times 1,20 \times 0,531 \times 0,0447 = 2,42 \text{ m}^3/\text{s} \approx 2,40$.

$$\boxed{h_n \approx 0,80 \text{ m}}$$

$U = 2,40/1,20 = 2,0 \text{ m/s}$; $Fr = 2,0/\sqrt{9,81 \times 0,80} = 0,71 < 1$: fluvial, mais proche du critique — une réduction de section ou un raidissement local pourraient faire basculer l'écoulement en torrentiel : prudence dans le dessin des raccords.

8.5.3 Exercice 8.3 — Célérité et propagation d'une intumescence

Une vanne de tête d'un canal rectangulaire large ($h = 1,60 \text{ m}$, $U = 0,90 \text{ m/s}$) est brusquement manœuvrée, créant une petite intumescence. Calculer la célérité des ondes et

leurs vitesses absolues de propagation vers l'aval et vers l'amont. Combien de temps l'information met-elle à atteindre un ouvrage situé 3,0 km à l'amont ?

Solution.

$$c = \sqrt{gh} = \sqrt{9,81 \times 1,60} = 3,96 \text{ m/s}; \quad Fr = \frac{0,90}{3,96} = 0,23 \text{ (fluvial)}$$

Vitesses absolues des fronts d'onde :

$$w_{aval} = U + c = 4,86 \text{ m/s}; \quad w_{amont} = U - c = 0,90 - 3,96 = -3,06 \text{ m/s}$$

Le signe négatif confirme qu'une onde **remonte** le courant à 3,06 m/s : en fluvial, toute manœuvre se fait sentir à l'amont. Temps pour parcourir 3,0 km vers l'amont :

$$t = \frac{3000}{3,06} = 980 \text{ s} \approx 16,3 \text{ min}$$

Ce délai de propagation est une donnée d'exploitation essentielle (régulation des canaux, consignes de manœuvre) et illustre concrètement la structure en caractéristiques $U \pm c$ des équations de Saint-Venant.

8.5.4 Exercice 8.4 — Onde de rupture de barrage (solution de Ritter)

Un barrage retenant une hauteur $h_0 = 25,0 \text{ m}$ sur fond horizontal et sec cède instantanément. Dans le cadre des équations de Saint-Venant sans frottement, la solution de Ritter donne : célérité du front $w = 2\sqrt{gh_0}$ et, au droit du barrage, une profondeur constante $\frac{4}{9}h_0$ avec une vitesse $\frac{2}{3}\sqrt{gh_0}$. Calculer ces trois grandeurs et le temps d'arrivée du front sur un site à 8,0 km à l'aval.

Solution.

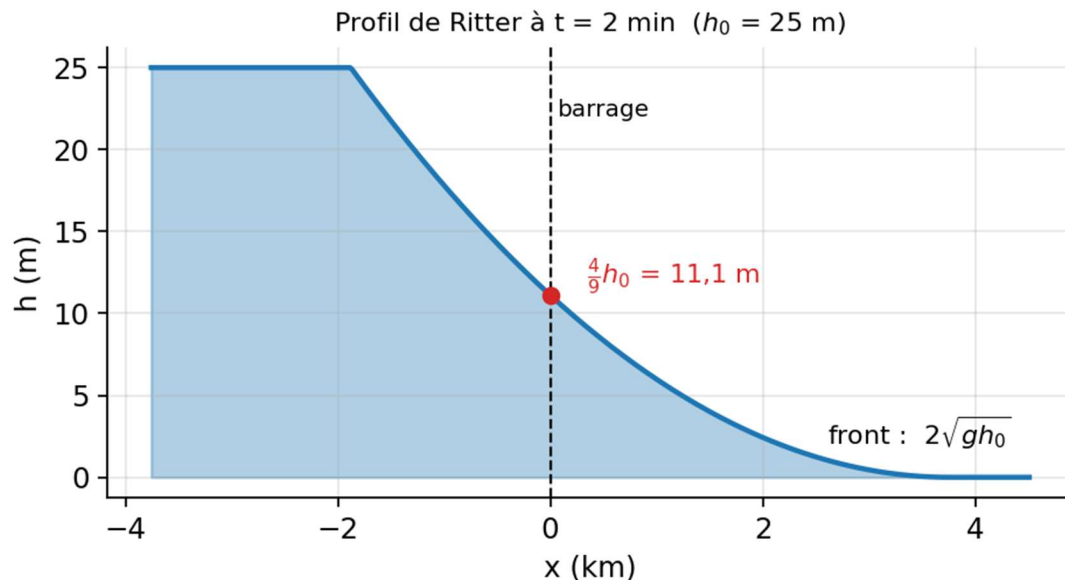
$$\sqrt{gh_0} = \sqrt{9,81 \times 25,0} = 15,66 \text{ m/s}$$

- Célérité du front : $w = 2 \times 15,66 = 31,3 \text{ m/s} \approx \mathbf{113 \text{ km/h}}$;
- Profondeur au droit du barrage : $\frac{4}{9} \times 25,0 = 11,1 \text{ m}$;
- Vitesse au droit du barrage : $\frac{2}{3} \times 15,66 = 10,4 \text{ m/s}$.

Temps d'arrivée à 8,0 km : $t = 8000/31,3 = 256 \text{ s} \approx \mathbf{4,3 \text{ minutes}}$.

Ces ordres de grandeur (front plus rapide qu'une voiture en ville, quelques minutes de préavis) fondent les études réglementaires d'ondes de submersion et les plans d'alerte à

l'aval des grands barrages. En pratique, le frottement et la géométrie réelle de la vallée ralentissent et amortissent le front : la solution de Ritter est un majorant pédagogique, les études réelles résolvent numériquement Saint-Venant complet.



Profil de Ritter deux minutes après la rupture ($h_0 = 25 \text{ m}$) : détente parabolique entre l'onde négative qui remonte la retenue et le front qui dévale la vallée à $2\sqrt{gh_0}$.

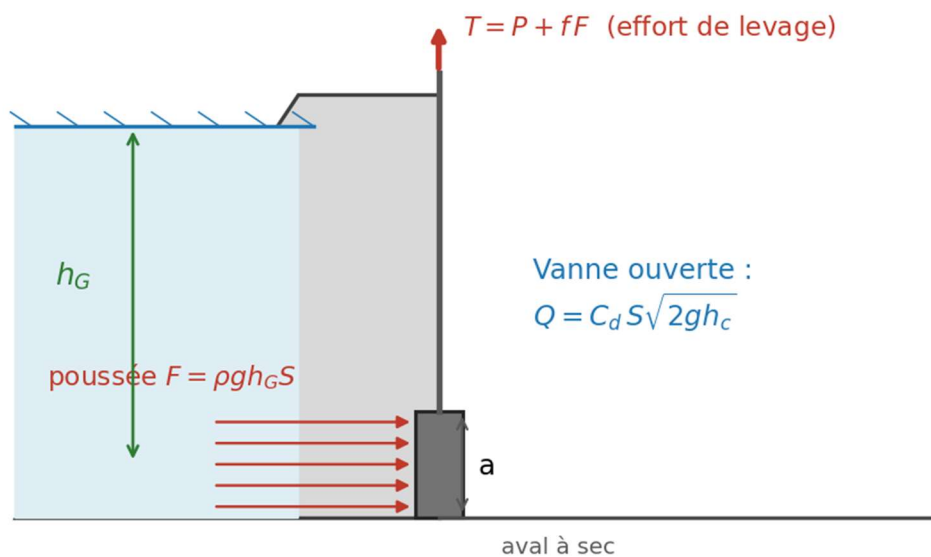
8.6 Ce qu'il faut retenir

- En surface libre, la géométrie mouillée est une inconnue ; la pression est hydrostatique dans la section.
- $Fr = U/\sqrt{gh_m}$ classe les régimes : fluvial (aval commande) / torrentiel (amont commande) ; le ressaut assure la transition torrentiel $\rightarrow$ fluvial.
- Le régime uniforme obéit à Manning-Strickler $Q = KSR_h^{2/3}\sqrt{i}$ et définit la profondeur normale.
- Les équations de Saint-Venant (continuité + dynamique) régissent le non-permanent 1D ; leurs simplifications successives (onde diffusante, cinématique, ligne d'eau, uniforme) couvrent l'essentiel des calculs de l'ingénieur.
- Leur caractère hyperbolique ($U \pm c$) dicte les conditions aux limites et les délais de propagation.

9 Problèmes de synthèse corrigés

Les problèmes qui suivent croisent plusieurs chapitres, à l'image des sujets d'examen et des situations de projet. Pour chacun, on recommande la démarche suivante : schéma coté, inventaire des données et des hypothèses, choix des points d'application des théorèmes, calcul littéral complet **avant** toute application numérique, vérification des ordres de grandeur et des unités.

9.1 Problème S.1 — Vanne de chasse d'un barrage et butée



Vanne de fond d'un barrage : sous forte charge, la répartition des pressions est quasi uniforme sur la hauteur du pertuis et le frottement dans les glissières domine l'effort de levage.

Un pertuis de fond rectangulaire (largeur $b = 1,50$ m, hauteur $a = 1,00$ m) est fermé par une vanne plane verticale. Le plan d'eau amont est à 12,0 m au-dessus du seuil du pertuis (arête inférieure de la vanne) ; l'aval est à sec.

1. Calculer la poussée hydrostatique sur la vanne fermée et son point d'application. 2. La vanne coulisse verticalement dans des glissières ; le coefficient de frottement vanne/glissière vaut $f = 0,25$ et le poids propre de la vanne est de 8,0 kN. Calculer l'effort de levage au décollage. 3. Vanne ouverte, le pertuis débite comme un orifice de section $a \times b$ avec $C_d = 0,60$ sous la charge (mesurée au centre du pertuis) $h_c = 11,5$ m. Calculer le débit évacué.

Solution.

1. Profondeur du centre de gravité de la vanne : $h_G = 12,0 - 0,50 = 11,5 \text{ m}$.

$$F = \rho g h_G S = 9810 \times 11,5 \times (1,50 \times 1,00) = 169\,223 \text{ N} \approx 169 \text{ kN}$$

Centre de poussée :

$$h_C = h_G + \frac{I_G}{h_G S} = 11,5 + \frac{1,50 \times 1,00^3 / 12}{11,5 \times 1,50} = 11,5 + \frac{0,125}{17,25} = 11,507 \text{ m}$$

À grande profondeur relative, le centre de poussée est pratiquement confondu avec le centre de gravité (écart de 7 mm) : la répartition de pression est quasi uniforme sur la hauteur de la vanne.

2. Au décollement, l'effort de levage T doit vaincre le poids et le frottement engendré par la poussée :

$$T = P + f F = 8000 + 0,25 \times 169\,223 = 8000 + 42\,306 = 50\,306 \text{ N} \approx 50,3 \text{ kN}$$

Le frottement dû à la poussée hydrostatique représente 84 % de l'effort : c'est lui qui dimensionne le treuil — d'où l'intérêt des vannes-secteurs et des dispositifs d'équilibrage.

3. Débit d'orifice sous forte charge :

$$Q = C_d S \sqrt{2gh_C} = 0,60 \times 1,50 \times \sqrt{19,62 \times 11,5} = 0,90 \times \sqrt{225,6} = 0,90 \times 15,02 = 13,5 \text{ m}^3/\text{s}$$

9.2 Problème S.2 — Alimentation gravitaire d'une ville

Un réservoir de tête (plan d'eau à la cote 245,0 m, supposé constant) alimente un réservoir de distribution (plan d'eau à la cote 198,0 m) par une conduite en fonte revêtue ($\varepsilon = 0,1 \text{ mm}$) de longueur $L = 3600 \text{ m}$. Le débit de dimensionnement est $Q = 120 \text{ L/s}$. Pertes singulières : $\sum K = 8,0$. ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$)

1. Déterminer le diamètre commercial nécessaire (série : 250, 300, 350, 400 mm). 2. Pour le diamètre retenu, calculer le débit maximal réellement transitable. 3. Tracer l'allure de la ligne de charge et vérifier la pression au point bas du profil, situé à la cote 187,0 m à 1200 m du réservoir de tête.

Solution.

1. Charge disponible : $\Delta z = 245,0 - 198,0 = 47,0 \text{ m}$. Testons **DN 300** :

$$U = \frac{4 \times 0,120}{\pi \times 0,300^2} = 1,70 \text{ m/s}; \quad Re = \frac{1,70 \times 0,300}{10^{-6}} = 5,1 \times 10^5; \quad \frac{\varepsilon}{D} = 3,33 \times 10^{-4}$$

Swamee-Jain :

$$\lambda = \frac{0,25}{\left[\log_{10} \left(\frac{3,33 \times 10^{-4}}{3,71} + \frac{5,74}{(5,1 \times 10^5)^{0,9}} \right) \right]^2} = \frac{0,25}{[\log_{10}(8,98 \times 10^{-5} + 4,23 \times 10^{-5})]^2}$$

$$= \frac{0,25}{(-3,879)^2} = 0,0166$$

$$\Delta H = \left(0,0166 \times \frac{3600}{0,300} + 8,0 \right) \frac{1,70^2}{19,62} = (199,2 + 8,0) \times 0,1473 = 30,5 \text{ m} < 47,0 \text{ m}$$

Le DN 300 convient (le DN 250 donnerait, calcul analogue, $U = 2,44 \text{ m/s}$ et $\Delta H \approx 74 \text{ m} > 47 \text{ m}$: insuffisant). **On retient DN 300.**

2. Débit maximal : on sature la charge, $\Delta H = 47,0 \text{ m}$. Itérons à partir de $\lambda = 0,0166$:

$$U = \sqrt{\frac{2g \times 47,0}{\lambda L/D + 8,0}} = \sqrt{\frac{922,1}{0,0166 \times 12\,000 + 8,0}} = \sqrt{\frac{922,1}{207,2}} = 2,11 \text{ m/s}$$

Nouveau $Re = 6,3 \times 10^5 \rightarrow \lambda = 0,0163 \rightarrow U = 2,13 \text{ m/s}$ (convergé).

$$Q_{max} = 2,13 \times \frac{\pi \times 0,09}{4} = 0,150 \text{ m}^3/\text{s} = 150 \text{ L/s}$$

La conduite offre une réserve de capacité de 25 % sur le débit de projet. En exploitation au débit nominal, l'excédent de charge (16,5 m) sera dissipé par un organe de réglage à l'arrivée.

3. Au débit de projet, la ligne de charge descend linéairement (pente $j = (30,5 - 8 \times 0,147 \times \approx 1)/3600 \approx 29,3/3600 = 8,15 \text{ m/km}$ hors singularités, réparties pour simplifier). Charge au point bas ($x = 1200 \text{ m}$) :

$$H(1200) \approx 245,0 - 8,15 \times 1,2 - (\text{singularités amont} \approx 0,4) \approx 234,8 \text{ m}$$

Pression au point bas (vitesse : $U^2/2g = 0,15 \text{ m}$) :

$$\frac{p}{\rho g} = H - z - \frac{U^2}{2g} = 234,8 - 187,0 - 0,15 = 47,6 \text{ mCE} \approx 4,7 \text{ bar}$$

La conduite au point bas doit être timbrée en conséquence (PN 10 conviendra largement, en tenant compte des régimes transitoires).

9.3 Problème S.3 — Station de pompage avec vérification de cavitation

Une pompe prélève $Q = 40 \text{ L/s}$ dans une bache dont le plan d'eau est à la cote $100,0 \text{ m}$; l'axe de la pompe est à la cote $103,5 \text{ m}$. Conduite d'aspiration : $D = 200 \text{ mm}$, $L = 12 \text{ m}$, $\lambda = 0,022$, $\sum K = 3,5$ (crépine-clapet $3,0$ + coude $0,5$). Pression atmosphérique $101,3 \text{ kPa}$; pression de vapeur $2,3 \text{ kPa}$; NPSH requis par la pompe à ce débit : $4,2 \text{ m}$.

1. Calculer la vitesse et les pertes de charge à l'aspiration. 2. Calculer la pression absolue à l'entrée de la pompe. 3. Calculer le NPSH disponible et conclure sur le risque de cavitation. Quelle serait la cote maximale admissible de l'axe de la pompe (avec une marge de sécurité de $0,5 \text{ m}$) ?

Solution.

$$U = \frac{4 \times 0,040}{\pi \times 0,200^2} = 1,27 \text{ m/s}; \quad \frac{U^2}{2g} = 0,0824 \text{ m}$$

$$\Delta H_a = \left(0,022 \times \frac{12}{0,200} + 3,5 \right) \times 0,0824 = (1,32 + 3,5) \times 0,0824 = 0,397 \text{ m} \approx 0,40 \text{ m}$$

1. Bernoulli (pressions absolues) entre le plan d'eau (0) et l'entrée de la pompe (e) :

$$\frac{p_e}{\rho g} = \frac{p_{atm}}{\rho g} - (z_e - z_0) - \frac{U^2}{2g} - \Delta H_a = 10,33 - 3,50 - 0,08 - 0,40 = 6,35 \text{ mCE}$$

$$p_e = 9810 \times 6,35 = 62\,300 \text{ Pa} \approx 62,3 \text{ kPa}$$

L'entrée de pompe est en dépression (pression relative -39 kPa), situation normale pour une pompe en aspiration.

3. NPSH disponible :

$$NPSH_d = \frac{p_e}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} - \frac{p_v}{\rho g} = 6,35 + 0,08 - 0,23 = 6,20 \text{ m}$$

(On retrouve la formule directe $NPSH_d = \frac{p_{atm} - p_v}{\rho g} - h_{asp} - \Delta H_a = 10,33 - 0,23 - 3,50 - 0,40 = 6,20 \text{ m}$.)

$$NPSH_d = 6,20 \text{ m} > NPSH_r = 4,2 \text{ m}$$

Pas de cavitation au débit de projet, avec une marge de $2,0 \text{ m}$. Hauteur d'aspiration maximale avec marge de $0,5 \text{ m}$:

$$h_{asp,max} = \frac{p_{atm} - p_v}{\rho g} - \Delta H_a - NPSH_r - 0,5 = 10,10 - 0,40 - 4,2 - 0,5 = 5,0 \text{ m}$$

soit une cote d'axe maximale de **105,0 m**. Toute implantation plus haute (ou tout encrassement de la crépine, ou toute baisse du plan d'eau) rapprocherait la pompe de la cavitation.

9.4 Problème S.4 — Jet d'un canon à eau sur un écran

Un canon hydraulique de nettoyage délivre un jet de diamètre $d = 25 \text{ mm}$ sous une pression relative en amont de la lance $p_1 = 6,0 \text{ bar}$; la section amont de la lance a un diamètre $D = 75 \text{ mm}$. Fluide parfait, lance horizontale.

1. Calculer la vitesse et le débit du jet. 2. Calculer la force exercée par le jet sur un écran plan perpendiculaire. 3. Calculer la force axiale supportée par l'assemblage de la lance (réaction de lance).

Solution.

1. Bernoulli entre l'amont (1) et la sortie du jet (2, à l'air libre), avec continuité $V_1 = V_2(d/D)^2 = V_2/9$:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{2p_1}{\rho(1 - 1/81)}} = \sqrt{\frac{2 \times 6,0 \times 10^5}{1000 \times 0,9877}} = \sqrt{1215} = 34,9 \text{ m/s}$$

$$Q = V_2 \frac{\pi d^2}{4} = 34,9 \times 4,909 \times 10^{-4} = 1,71 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} \approx 17,1 \text{ L/s}$$

2. Écran perpendiculaire (déviation à 90°) :

$$F = \rho Q V_2 = 1000 \times 0,0171 \times 34,9 = 598 \text{ N}$$

Une force de près de 60 kgf : les lances à incendie exigent d'être fermement tenues.

3. Volume de contrôle : la lance entre 1 et 2. $V_1 = 34,9/9 = 3,88 \text{ m/s}$; $S_1 = 4,418 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. En projection axiale, R étant l'action de la lance sur l'eau :

$$p_1 S_1 + R = \rho Q (V_2 - V_1)$$

$$R = 1000 \times 0,0171 \times (34,9 - 3,88) - 6,0 \times 10^5 \times 4,418 \times 10^{-3} = 530 - 2651 = -2121 \text{ N}$$

L'eau pousse la lance vers l'**amont** avec $2121 \text{ N} \approx \mathbf{2,1 \text{ kN}}$: c'est l'effort de recul que reprennent le raccord et l'opérateur.

9.5 Problème S.5 — Étude complète d'un venturi vertical

Un venturi est monté sur une conduite verticale, l'écoulement étant ascendant. Entrée (1) : $D_1 = 150 \text{ mm}$; col (2) : $D_2 = 75 \text{ mm}$, situé $a = 0,30 \text{ m}$ au-dessus de la section 1. Un manomètre différentiel au mercure est branché entre 1 et 2 et indique $\Delta h = 220 \text{ mm}$.
Fluide parfait, $C_q = 1$.

1. Montrer que la lecture du manomètre différentiel donne directement la différence des cotes piézométriques entre 1 et 2, indépendamment de la dénivelée a . 2. Calculer le débit.

Solution.

1. Notons $h^* = z + p/\rho g$ la cote piézométrique. Le cheminement manométrique de 1 vers 2 à travers le mercure conduit (calcul classique du manomètre différentiel en tenant compte des cotes des ménisques) à :

$$h_1^* - h_2^* = \left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho_e} - 1 \right) \Delta h = (13,6 - 1) \times 0,220 = 2,772 \text{ m}$$

La dénivelée a des prises n'apparaît pas : les colonnes d'eau des tubulures la compensent exactement. **Un manomètre différentiel mesure toujours une différence de cotes piézométriques**, quelle que soit l'orientation de l'appareil — propriété essentielle en pratique.

2. Bernoulli entre 1 et 2 s'écrit :

$$h_1^* + \frac{V_1^2}{2g} = h_2^* + \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = 2,772 \text{ m}$$

Continuité : $V_1 = V_2(D_2/D_1)^2 = V_2/4$, d'où $V_2^2(1 - 1/16) = 2g \times 2,772$:

$$V_2 = \sqrt{\frac{19,62 \times 2,772}{0,9375}} = \sqrt{58,01} = 7,62 \text{ m/s}$$

$$Q = V_2 \frac{\pi D_2^2}{4} = 7,62 \times 4,418 \times 10^{-3} = 3,37 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} \approx 33,7 \text{ L/s}$$

9.6 Problème S.6 — Batardeau flottant échoué puis ballasté

Un batardeau caisson parallélépipédique (longueur $12,0 \text{ m}$, largeur $5,0 \text{ m}$, hauteur $4,0 \text{ m}$) en acier pèse à vide 720 kN . On le remorque flottant, puis on le coule sur place en le ballastant à l'eau. Eau de mer : $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$.

1. Calculer le tirant d'eau au remorquage. 2. Le centre de gravité à vide est à 1,80 m au-dessus du fond. Vérifier la stabilité transversale au remorquage. 3. Quel volume d'eau de ballast faut-il admettre pour que le caisson repose sur un fond situé à 3,60 m sous la surface, avec une réaction d'appui d'au moins 200 kN (sécurité vis-à-vis du soulèvement) ?

Solution.

1. Flottaison : $\rho g (12 \times 5 \times T_e) = 720\,000$:

$$T_e = \frac{720\,000}{1025 \times 9,81 \times 60} = 1,19 \text{ m}$$

2. Centre de carène : $z_C = T_e/2 = 0,597 \text{ m}$. Inertie de flottaison (axe longitudinal, largeur au cube) :

$$I = \frac{12 \times 5^3}{12} = 125 \text{ m}^4; \quad V = 60 \times 1,19 = 71,6 \text{ m}^3$$

$$\overline{CM} = \frac{I}{V} = 1,745 \text{ m} \Rightarrow z_M = 0,597 + 1,745 = 2,342 \text{ m}$$

$$\overline{GM} = z_M - z_G = 2,342 - 1,80 = 0,54 \text{ m} > 0 \Rightarrow \text{stable}$$

3. Caisson posé, immergé sur 3,60 m. Poussée d'Archimède sur le volume immergé :

$$F_A = 1025 \times 9,81 \times (60 \times 3,60) = 2\,171\,900 \text{ N} \approx 2172 \text{ kN}$$

Équilibre vertical du caisson posé : $P_{vide} + P_{ballast} = F_A + R_{appui}$ avec $R_{appui} \geq 200 \text{ kN}$:

$$P_{ballast} \geq 2172 + 200 - 720 = 1652 \text{ kN}$$

Volume de ballast (eau de mer) :

$$V_b \geq \frac{1\,652\,000}{1025 \times 9,81} = 164,3 \text{ m}^3$$

Le caisson (volume interne $\approx 240 \text{ m}^3$) doit donc être ballasté aux deux tiers environ. On note l'importance des **sous-pressions** : posé sous 3,6 m d'eau, le caisson subit une poussée verticale de plus de 2100 kN qu'il faut lester pour garantir l'appui.

9.7 Problème S.7 — Comparaison laminaire/turbulent : transport d'un fluide visqueux

Un oléoduc de diamètre $D = 250 \text{ mm}$ et de longueur $L = 5,0 \text{ km}$ transporte un fioul ($\rho = 920 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 4 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$) à un débit $Q = 35 \text{ L/s}$.

1. Déterminer le régime, le coefficient λ et la perte de charge. 2. En hiver, la viscosité double ($\nu = 8 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$). Reprendre le calcul et comparer la puissance de pompage dans les deux cas (rendement 75 %).

Solution.

$$U = \frac{4 \times 0,035}{\pi \times 0,250^2} = 0,713 \text{ m/s}; \quad Re = \frac{0,713 \times 0,250}{4 \times 10^{-5}} = 4457$$

$Re > 4000$: régime turbulent (à peine). Conduite hydrauliquement lisse à ce Reynolds ; Blasius :

$$\lambda = 0,316 Re^{-0,25} = 0,316 \times 4457^{-0,25} = \frac{0,316}{8,17} = 0,0387$$

$$\Delta H = 0,0387 \times \frac{5000}{0,250} \times \frac{0,713^2}{19,62} = 0,0387 \times 20\,000 \times 0,0259 = 20,0 \text{ m de fioul}$$

2. Hiver : $Re = 2229 < 2300$: l'écoulement **repasse en laminaire** (on considère le régime laminaire établi) :

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{2229} = 0,0287$$

Paradoxalement plus faible que le λ turbulent d'été... mais comparons les pertes :

$$\Delta H = 0,0287 \times 20\,000 \times 0,0259 = 14,9 \text{ m de fioul}$$

Puissances absorbées ($P = \rho g Q \Delta H / \eta$) :

$$P_{\text{été}} = \frac{920 \times 9,81 \times 0,035 \times 20,0}{0,75} = 8,42 \text{ kW}; \quad P_{\text{hiver}} = \frac{920 \times 9,81 \times 0,035 \times 14,9}{0,75} = 6,28 \text{ kW}$$

Dans ce cas particulier, le passage en laminaire (perte proportionnelle à U et à ν) coûte moins que le régime turbulent d'été à ce point de fonctionnement précis. Attention toutefois : au voisinage de la transition, le régime est instable et les valeurs de λ incertaines ; un dimensionnement industriel s'écarterait de cette zone.

10 Sujet d'examen type corrigé

Durée conseillée : 2 heures. Documents non autorisés, formulaire fourni (annexe A), calculatrice autorisée. Prendre $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\nu_e = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

10.1 Exercice 1 — Hydrostatique (6 points)

Un mur-poids vertical retient de l'eau sur $H = 4,20$ m. Par mètre linéaire de mur : 1. Calculer la poussée hydrostatique et son point d'application. (2 pts) 2. Le mur, de section rectangulaire (épaisseur $e = 2,20$ m, hauteur $4,80$ m), est en béton ($\rho_b = 2400$ kg/m³). Calculer son poids et le moment stabilisateur par rapport à l'arête aval du pied. (2 pts) 3. Calculer le coefficient de sécurité au renversement. (2 pts)

Corrigé.

$$F = \frac{1}{2} \rho g H^2 = 0,5 \times 9810 \times 4,20^2 = 86\,524 \text{ N/m} \approx 86,5 \text{ kN/m}$$

- appliquée à $H/3 = 1,40$ m au-dessus de la base.

$$P = \rho_b g (e \times h \times 1) = 2400 \times 9,81 \times 2,20 \times 4,80 = 248\,650 \text{ N/m} \approx 248,7 \text{ kN/m}$$

Bras de levier du poids par rapport à l'arête aval : $e/2 = 1,10$ m.

$$M_s = 248,7 \times 1,10 = 273,5 \text{ kN m/m}$$

3. Moment de renversement :

$$M_r = F \times \frac{H}{3} = 86,5 \times 1,40 = 121,1 \text{ kN m/m}$$

$$C_s = \frac{M_s}{M_r} = \frac{273,5}{121,1} = 2,26$$

$C_s > 1,5$: la stabilité au renversement est assurée (il resterait à vérifier le glissement, la contrainte au sol et l'effet des sous-pressions).

10.2 Exercice 2 — Bernoulli et quantité de mouvement (7 points)

Une conduite horizontale de diamètre $D_1 = 200$ mm se termine par une tuyère de diamètre de sortie $D_2 = 80$ mm débouchant à l'air libre. La pression relative mesurée en amont de la tuyère vaut $p_1 = 150$ kPa. Fluide parfait. 1. Calculer la vitesse de sortie du jet et le débit. (3 pts) 2. Calculer la force axiale exercée par l'eau sur la tuyère. (3 pts) 3. Le jet frappe ensuite une plaque fixe perpendiculaire : calculer la force sur la plaque. (1 pt)

Corrigé.

1. Continuité : $V_1 = V_2 (D_2/D_1)^2 = V_2 (0,4)^2 = 0,16 V_2$. Bernoulli (horizontal, sortie à l'air libre) :

$$p_1 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho V_2^2}{2}(1 - 0,0256)$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2 \times 150\,000}{1000 \times 0,9744}} = \sqrt{307,9} = 17,55 \text{ m/s}$$

$$Q = V_2 \frac{\pi D_2^2}{4} = 17,55 \times 5,027 \times 10^{-3} = 8,82 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} \approx 88,2 \text{ L/s}$$

et $V_1 = 2,81 \text{ m/s}$.

2. Théorème d'Euler sur la tuyère, projection axiale, pressions relatives ($p_2 = 0$) ;
 $S_1 = 3,142 \times 10^{-2} \text{ m}^2$:

$$p_1 S_1 + R = \rho Q (V_2 - V_1)$$

$$R = 1000 \times 0,0882 \times (17,55 - 2,81) - 150\,000 \times 3,142 \times 10^{-2} = 1300 - 4713 \\ = -3413 \text{ N}$$

Force de l'eau sur la tuyère : $F = -R = +3413 \text{ N}$ vers l'amont ? Attention au signe : $R < 0$ signifie que la tuyère retient l'eau vers l'amont ; l'eau **tire la tuyère vers l'aval** avec $|R|$... Reprenons proprement : l'action de l'eau sur la tuyère est $-R = +3413 \text{ N}$, orientée dans le sens **positif choisi** (sens de l'écoulement)... Le sens positif de R ayant été pris vers l'aval, $R = -3413 \text{ N}$ signifie que la tuyère pousse l'eau vers l'amont ; par réaction, **l'eau pousse la tuyère vers l'aval avec $3413 \text{ N} \approx 3,4 \text{ kN}$** . L'assemblage bridé doit reprendre cet effort de traction.

3. Plaque perpendiculaire :

$$F = \rho Q V_2 = 1000 \times 0,0882 \times 17,55 = 1548 \text{ N} \approx 1,55 \text{ kN}$$

10.3 Exercice 3 — Fluides réels (7 points)

Deux réservoirs, dont les plans d'eau sont distants de $\Delta z = 25,0 \text{ m}$, sont reliés par une conduite en acier ($\varepsilon = 0,05 \text{ mm}$) de diamètre $D = 100 \text{ mm}$ et de longueur $L = 480 \text{ m}$. Pertes singulières : entrée 0,5 ; deux coudes à 0,3 ; vanne 0,2 ; sortie 1,0. 1. Écrire l'équation reliant Δz à la vitesse. (2 pts) 2. Calculer la vitesse et le débit (deux itérations suffisent ; initialiser en régime turbulent rugueux). (4 pts) 3. La vanne est réglée pour réduire le débit de moitié : quel coefficient K_v doit-elle présenter ? (1 pt)

Corrigé.

1. $\sum K = 0,5 + 0,6 + 0,2 + 1,0 = 2,3 :$

$$\Delta z = \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum K \right) \frac{U^2}{2g} = (4800 \lambda + 2,3) \frac{U^2}{19,62}$$

2. **Initialisation** (turbulent rugueux, $\varepsilon/D = 5 \times 10^{-4}$) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \frac{5 \times 10^{-4}}{3,71} = -2 \log_{10}(1,348 \times 10^{-4}) = 7,74 \Rightarrow \lambda_0 = 0,0167$$

$$U_0 = \sqrt{\frac{19,62 \times 25,0}{0,0167 \times 4800 + 2,3}} = \sqrt{\frac{490,5}{82,5}} = 2,44 \text{ m/s}$$

Itération. $Re = \frac{2,44 \times 0,100}{10^{-6}} = 2,44 \times 10^5$. Colebrook :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(1,348 \times 10^{-4} + \frac{2,51}{2,44 \times 10^5 \times 0,1292} \right) = -2 \log_{10}(2,14 \times 10^{-4}) = 7,34$$

$$\lambda_1 = 0,0186 \Rightarrow U_1 = \sqrt{\frac{490,5}{0,0186 \times 4800 + 2,3}} = \sqrt{\frac{490,5}{91,6}} = 2,31 \text{ m/s}$$

Une itération supplémentaire ($Re = 2,31 \times 10^5$) redonne $\lambda \approx 0,0186$: convergé.

$$Q = 2,31 \times \frac{\pi \times 0,01}{4} = 1,82 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} \approx 18,2 \text{ L/s}$$

3. Débit moitié $\Rightarrow U' = 1,16 \text{ m/s}$; $Re' = 1,16 \times 10^5 \rightarrow$ Colebrook : $\lambda' \approx 0,0196$. La charge disponible étant inchangée :

$$\Delta z = \left(\lambda' \frac{L}{D} + 2,3 + K_v \right) \frac{U'^2}{2g} \Rightarrow 25,0 = (94,1 + 2,3 + K_v) \times \frac{1,16^2}{19,62}$$

$$96,4 + K_v = \frac{25,0 \times 19,62}{1,342} = 365,5 \Rightarrow K_v \approx 269$$

La vanne doit dissiper l'essentiel de la charge : réduire un débit de moitié exige un coefficient de perte considérable — illustration du caractère très « raide » du réglage par vanne en fin de course.

11 Exercices d'entraînement (avec réponses)

Les exercices suivants sont proposés pour le travail personnel et les séances de travaux dirigés. Seule la réponse finale est fournie : la rédaction complète (hypothèses, calcul

littéral, application numérique, unités) est laissée à l'étudiant. Prendre $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\nu_e = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ sauf indication contraire.

11.1 Série 1 — Propriétés des fluides

TD 1.1. Un volume de $6,5 \text{ m}^3$ d'huile pèse $55,0 \text{ kN}$. Calculer sa masse volumique, son poids volumique et sa densité. *Réponses : $\rho = 863 \text{ kg/m}^3$; $\gamma = 8,46 \text{ kN/m}^3$; $d = 0,86$.*

TD 1.2. De l'eau est comprimée de 1 bar à 250 bar . Quelle est la variation relative de volume ? ($E_v = 2,2 \times 10^9 \text{ Pa}$.) *Réponse : $\Delta V/V = -1,13 \%$.*

TD 1.3. Deux plaques parallèles sont distantes de $1,2 \text{ mm}$; l'espace est rempli d'une huile de viscosité $\mu = 0,20 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. La plaque supérieure ($0,80 \text{ m}^2$) se déplace à $0,60 \text{ m/s}$. Calculer la contrainte de cisaillement et la force de traction. *Réponses : $\tau = 100 \text{ Pa}$; $F = 80 \text{ N}$.*

TD 1.4. Un arbre de diamètre $80,0 \text{ mm}$ tourne à 1200 tr/min dans un palier lisse de longueur 120 mm ; le jeu radial est de $0,25 \text{ mm}$, rempli d'huile ($\mu = 0,09 \text{ Pa}\cdot\text{s}$). Calculer le couple et la puissance dissipés. *Réponses : $C \approx 1,82 \text{ N}\cdot\text{m}$; $P \approx 229 \text{ W}$.*

TD 1.5. Jusqu'à quelle hauteur l'eau monte-t-elle par capillarité dans un sol fin assimilé à des tubes de $0,05 \text{ mm}$ de diamètre ($\sigma = 0,073 \text{ N/m}$, $\theta = 0$) ? *Réponse : $h \approx 0,60 \text{ m}$.*

TD 1.6. Calculer la masse volumique de l'air à $35 \text{ }^\circ\text{C}$ sous $0,95 \text{ bar}$, puis à $0 \text{ }^\circ\text{C}$ sous $1,013 \text{ bar}$. *Réponses : $1,07 \text{ kg/m}^3$; $1,29 \text{ kg/m}^3$.*

11.2 Série 2 — Hydrostatique

TD 2.1. Convertir en pascals puis en mètres de colonne d'eau : $2,5 \text{ bar}$; 740 mmHg ; 35 psi . *Réponses : $250 \text{ kPa} = 25,5 \text{ mCE}$; $98,7 \text{ kPa} = 10,06 \text{ mCE}$; $241 \text{ kPa} = 24,6 \text{ mCE}$.*

TD 2.2. Un plongeur descend à 28 m dans l'eau de mer ($\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$). Calculer la pression relative et la pression absolue ($p_{atm} = 101,3 \text{ kPa}$). *Réponses : $281,6 \text{ kPa}$; $382,9 \text{ kPa}$.*

TD 2.3. Un manomètre en U au mercure est branché sur une conduite d'eau ; le centre de la conduite est $0,40 \text{ m}$ au-dessus du ménisque le plus bas et la dénivellation du mercure vaut $0,25 \text{ m}$. Calculer la pression relative au centre de la conduite. *Réponse : $p = \rho_{Hg}g(0,25) - \rho_e g(0,40) = 29,4 \text{ kPa}$.*

TD 2.4. Une vanne circulaire verticale de diamètre 0,90 m a son centre à 3,20 m sous la surface libre. Calculer la poussée et la position du centre de poussée. *Réponses : $F = 20,0 \text{ kN}$; $h_C = 3,216 \text{ m}$ (1,6 cm sous le centre).*

TD 2.5. Un barrage-poids présente un parement amont vertical ; la retenue est à 32,0 m au-dessus du pied. Par mètre linéaire : calculer la poussée, son point d'application et le moment de renversement au pied. *Réponses : $F = 5023 \text{ kN/m}$; à 10,67 m du pied ; $M = 53\,580 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$.*

TD 2.6. Un tronc cylindrique de bois ($d = 0,70$) de diamètre 0,60 m et de longueur 4,0 m flotte dans l'eau douce. Calculer le volume immergé et la masse du tronc. *Réponses : $V_{imm} = 0,792 \text{ m}^3$; $m = 792 \text{ kg}$.*

TD 2.7. Un iceberg ($\rho = 917 \text{ kg/m}^3$) flotte en eau de mer ($\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$). Quelle fraction de son volume émerge ? *Réponse : 10,5 %.*

TD 2.8. Une barge rectangulaire (14 m $\times$ 6 m, tirant d'eau 1,20 m en eau douce) a son centre de gravité à 1,50 m au-dessus du fond. Vérifier la stabilité transversale. *Réponse : $\overline{GM} = 0,60 + 2,50 - 1,50 = +1,60 \text{ m} > 0$: stable.*

11.3 Série 3 — Cinématique

TD 3.1. Une conduite de 250 mm transporte 68 L/s. Calculer la vitesse moyenne. Quel diamètre donnerait 1,0 m/s ? *Réponses : $U = 1,39 \text{ m/s}$; $D = 294 \text{ mm}$ ($\rightarrow \text{DN } 300$).*

TD 3.2. Un canal rectangulaire de 2,40 m de largeur transporte de l'eau sur 0,85 m de profondeur à la vitesse moyenne de 1,10 m/s. Calculer le débit en m^3/s et en m^3/h . *Réponses : $2,24 \text{ m}^3/\text{s} = 8078 \text{ m}^3/\text{h}$.*

TD 3.3. Vérifier que le champ $u = 2xy$, $v = -y^2 + x$ (2D) est incompressible ; est-il irrotationnel ? *Réponses : $\text{div} = 2y - 2y = 0$: oui ; $\omega_z = 1 - 2x \neq 0$: non (sauf sur $x = 1/2$).*

TD 3.4. Dans une tuyère, la vitesse passe de 4 m/s à 24 m/s sur 0,80 m, linéairement. Calculer l'accélération convective à mi-parcours. *Réponse : $a = 14 \times 25 = 350 \text{ m/s}^2$.*

TD 3.5. Un réservoir de 400 m^3 doit être rempli en 6 h par une conduite où la vitesse ne doit pas dépasser 1,5 m/s. Quel diamètre minimal retenir ? *Réponse : $Q = 18,5 \text{ L/s}$; $D_{min} = 125,4 \text{ mm} \rightarrow \text{DN } 150$.*

11.4 Série 4 — Fluide parfait

TD 4.1. Dans une conduite horizontale, la section passe de 300 mm à 150 mm ; $Q = 90$ L/s ; $p_1 = 300$ kPa. Calculer p_2 . *Réponse : $V_1 = 1,27$ m/s ; $V_2 = 5,09$ m/s ; $p_2 = 288,0$ kPa.*

TD 4.2. Un réservoir se vide par un orifice en mince paroi de 40 mm de diamètre sous 6,0 m de charge ($C_d = 0,61$). Calculer le débit. *Réponse : $Q = 8,32$ L/s.*

TD 4.3. Un tube de Pitot en rivière indique une hauteur dynamique de 95 mm d'eau. Calculer la vitesse locale. *Réponse : $V = 1,37$ m/s.*

TD 4.4. Un venturi 250/125 mm ($C_q = 0,97$) sur conduite horizontale d'eau donne $\Delta p = 22$ kPa. Calculer le débit. *Réponse : $Q = 82$ L/s.*

TD 4.5. Un siphon de 60 mm de diamètre vidange un bassin ; la sortie est 2,20 m sous le plan d'eau, le point haut 1,10 m au-dessus. Fluide parfait. Calculer le débit et la pression relative au point haut. *Réponses : $V = 6,57$ m/s ; $Q = 18,6$ L/s ; $p_c = -\rho g(1,10) - \frac{1}{2}\rho V^2 = -32,4$ kPa.*

TD 4.6. Une turbine reçoit $2,4$ m³/s sous une chute nette de 38 m ; rendement global 88 %. Calculer la puissance électrique produite. *Réponse : $P = 0,88 \times \rho g Q H = 787$ kW.*

TD 4.7. Le niveau d'un réservoir cylindrique de 1,60 m de diamètre baisse de 3,60 m à 0,90 m par un orifice de 30 mm ($C_d = 0,62$). Calculer le temps de vidange. *Réponse : $t = \frac{2S(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{C_d s \sqrt{2g}} \approx 1985$ s ≈ 33 min.*

11.5 Série 5 — Quantité de mouvement

TD 5.1. Un jet de 50 mm de diamètre et de vitesse 20 m/s frappe perpendiculairement un mur. Calculer la force. *Réponse : $F = \rho S V^2 = 785$ N.*

TD 5.2. Le même jet est dévié de 135° par un auget fixe. Calculer la force résultante sur l'auget. *Réponse : $F = \rho S V^2 \sqrt{(1 + \cos 45^\circ)^2 + \sin^2 45^\circ} = 1451$ N.*

TD 5.3. Un coude horizontal à 45°, diamètre constant 400 mm, transite 400 L/s sous une pression relative uniforme de 300 kPa. Calculer la force d'ancrage. *Réponse : $F = 2(pS + \rho Q V) \sin(22,5^\circ) = 2 \times (37\,700 + 1273) \times 0,3827 \approx 29,8$ kN, portée par la bissectrice extérieure.*

TD 5.4. Un réservoir sur chariot éjecte horizontalement 15 L/s à 12 m/s. Quelle force faut-il pour retenir le chariot ? *Réponse : $F = \rho Q V = 180$ N.*

TD 5.5. Un auget mobile se déplace à 8 m/s sous un jet de 25 m/s et 40 L/s (section du jet fixe), déviation 180°. Calculer la force et la puissance. *Réponses : débit intercepté $\rho S(V - u)$; $F = 2\rho S(V - u)^2 = 924 \text{ N}$; $P = 7,4 \text{ kW}$.*

11.6 Série 6 — Fluides réels

TD 6.1. Eau à 20 °C, $D = 60 \text{ mm}$, $U = 0,035 \text{ m/s}$. Régime ? Même question pour une huile $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ à 1,2 m/s dans 100 mm. *Réponses : $Re = 2100$: transition (limite laminaire) ; $Re = 1200$: laminaire.*

TD 6.2. Une huile ($\rho = 880 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 8 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$) circule à 2,0 L/s dans une conduite de 40 mm et 150 m. Calculer la perte de charge et la chute de pression. *Réponses : $U = 1,59 \text{ m/s}$; $Re = 796$ (laminaire) ; $\lambda = 0,0804$; $\Delta H = 38,9 \text{ m}$; $\Delta p = 3,36 \text{ bar}$.*

TD 6.3. Eau, $D = 300 \text{ mm}$, $Q = 140 \text{ L/s}$, $L = 2000 \text{ m}$, $\varepsilon = 0,1 \text{ mm}$. Calculer la perte de charge (Swamee-Jain). *Réponses : $U = 1,98 \text{ m/s}$; $Re = 5,9 \times 10^5$; $\lambda \approx 0,0163$; $\Delta H \approx 21,7 \text{ m}$.*

TD 6.4. Quelle est la perte de charge singulière d'une vanne ($K = 3,5$) sur une conduite de 150 mm parcourue par 30 L/s ? *Réponse : $U = 1,70 \text{ m/s}$; $\Delta H_s = 0,51 \text{ m}$.*

TD 6.5. Deux réservoirs dénivelés de 12,0 m sont reliés par 600 m de conduite de 125 mm ($\lambda = 0,021$, $\sum K = 5$). Calculer le débit. *Réponse : $U = 1,51 \text{ m/s}$; $Q = 18,5 \text{ L/s}$.*

TD 6.6. Une pompe doit relever 20 L/s sur 26 m géométriques avec 14 m de pertes de charge totales. Rendement 70 %. Calculer la HMT et la puissance absorbée. *Réponses : $HMT = 40 \text{ m}$; $P = 11,2 \text{ kW}$.*

TD 6.7. Un élargissement brusque fait passer une conduite de 80 mm à 160 mm ; $Q = 12 \text{ L/s}$. Calculer la perte de Borda-Carnot. *Réponse : $U_1 = 2,39 \text{ m/s}$; $U_2 = 0,60 \text{ m/s}$; $\Delta H = 0,164 \text{ m}$.*

11.7 Série 7 — Analyse dimensionnelle et similitude

TD 7.1. Donner l'équation aux dimensions de : puissance, couple, contrainte, débit massique, tension superficielle, gradient de pression. *Réponses : ML^2T^{-3} ; ML^2T^{-2} ; $ML^{-1}T^{-2}$; MT^{-1} ; MT^{-2} ; $ML^{-2}T^{-2}$.*

TD 7.2. La période T des oscillations d'un pendule dépend de sa longueur ℓ , de g et de la masse m . Montrer par analyse dimensionnelle que $T = C\sqrt{\ell/g}$ (la masse n'intervient pas).

TD 7.3. La puissance P d'une hélice dépend de ρ , du diamètre D et de la vitesse de rotation n (tr/s). Établir $P = C_P \rho n^3 D^5$.

TD 7.4. Un déversoir doit évacuer $950 \text{ m}^3/\text{s}$; on l'étudie au $1/40$ (Froude). Calculer le débit du modèle et la correspondance des vitesses. *Réponses :* $Q_m = 950/40^{2,5} = 93,9 \text{ L/s}$; $V_p = V_m\sqrt{40} = 6,32 V_m$.

TD 7.5. Sur un modèle au $1/25$ en similitude de Froude, on mesure une force de houle de 46 N sur un caisson et une période de houle de $1,6 \text{ s}$. Calculer la force et la période réelles. *Réponses :* $F_p = 46 \times 25^3 = 719 \text{ kN}$; $T_p = 1,6 \times 5 = 8,0 \text{ s}$.

TD 7.6. Un modèle de conduite au $1/10$, essayé avec le même fluide en similitude de Reynolds, est parcouru à 15 m/s . Quelle vitesse représente-t-il en vraie grandeur ?
Réponse : $V_p = V_m/10 = 1,5 \text{ m/s}$.

12 Annexe A — Formulaire récapitulatif

Propriétés des fluides

- Masse volumique : $\rho = m/V$; poids volumique : $\gamma = \rho g$; densité : $d = \rho/\rho_{\text{réf}}$
- Gaz parfait : $p = \rho r T$ ($r_{\text{air}} = 287 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)
- Module d'élasticité : $E_v = -V dp/dV$; célérité du son : $c = \sqrt{E_v/\rho}$
- Loi de Newton : $\tau = \mu du/dy$; viscosité cinématique : $\nu = \mu/\rho$
- Loi de Laplace (goutte) : $\Delta p = 2\sigma/R$; loi de Jurin : $h = \frac{2\sigma\cos}{\rho g r}$

Hydrostatique

- $dp/dz = -\rho g$; liquide : $p_A = p_B + \rho g h$; $z + p/g = \text{cte}$
- Paroi plane : $F = \rho g h_G S$; centre de poussée : $y_C = y_G + \frac{I_G}{y_G S}$
- Paroi rectangulaire verticale : $F = \frac{1}{2} \rho g b H^2$ appliquée à $H/3$ du pied
- Paroi courbe : $F_H = \rho g h_G S'$ (projection verticale) ; $F_V = \rho g V$ (volume réel ou fictif)
- Archimède : $F_A = \rho_f g V_{\text{imm}}$; métacentre : $\overline{CM} = I/V_{\text{imm}}$; stabilité : $\overline{GM} > 0$

Cinématique

- Débit : $Q = US$; $Q_m = \rho Q$; continuité (incompressible) : $\text{div } \vec{V} = 0$; $U_1 S_1 = U_2 S_2$
- Accélération : $\vec{a} = \partial \vec{V} / \partial t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$

Fluide parfait

- Bernoulli : $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} = H = \text{cte}$
- Torricelli : $V = \sqrt{2gh}$; orifice : $Q = C_d S \sqrt{2gh}$
- Pitot : $V = \sqrt{2(p_t - p)/\rho}$
- Venturi : $Q = C_q S_2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho[1 - (S_2/S_1)^2]}}$
- Avec machines : $H_1 + H_p = H_2 + H_t + \sum \Delta H$; puissance : $P = \rho g Q H$

Quantité de mouvement

- Euler : $\sum \vec{F}_{ext} = \rho Q (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$
- Jet $\perp$ plaque : $F = \rho S V^2$; auget 180° : $F = 2\rho S V^2$; auget mobile : $F = 2\rho S (V - u)^2$

Fluides réels

- $Re = VD/\nu$; laminaire < 2000 < transition < 4000 < turbulent ; $D_h = 4S/P_m$
- Darcy-Weisbach : $\Delta H_L = \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$
- Laminaire : $\lambda = 64/Re$; Poiseuille : $Q = \frac{\pi \Delta p D^4}{128 \mu L}$
- Colebrook : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3,71} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$; Blasius (lisse, $Re < 10^5$) : $\lambda = 0,316 Re^{-0,25}$
- Singulières : $\Delta H_S = K \frac{U^2}{2g}$; Borda-Carnot : $\Delta H = \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g}$

Similitude

- $Re = \frac{VL}{\nu}$; $Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$; $Eu = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$; $We = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$; $Ma = \frac{V}{c}$
- Froude : $V \sim \lambda_\ell^{1/2}$; $t \sim \lambda_\ell^{1/2}$; $Q \sim \lambda_\ell^{5/2}$; $F \sim \lambda_\ell^3$; $P \sim \lambda_\ell^{7/2}$

Surface libre (chapitre 8)

- Rayon hydraulique : $R_h = S/P_m$; profondeur moyenne : $h_m = S/B$

- Célérité : $c = \sqrt{gh_m}$; Froude : $Fr = \frac{U}{\sqrt{gh_m}}$ (< 1 fluvial ; > 1 torrentiel)
- Manning-Strickler (régime uniforme) : $Q = K S R_h^{2/3} i^{1/2}$
- Saint-Venant : $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_\ell$; $\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(i - j)$ avec $j = \frac{Q^2}{K^2 S^2 R_h^{4/3}}$

13 Annexe B — Données numériques usuelles

Eau douce : $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$; $\gamma = 9,81 \text{ kN/m}^3$; $\nu(20^\circ\text{C}) = 1,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $E_v = 2,2 \times 10^9 \text{ Pa}$; $\sigma = 0,073 \text{ N/m}$; $p_v(20^\circ\text{C}) = 2,34 \text{ kPa}$.

Viscosité cinématique de l'eau selon la température :

$T (^\circ\text{C})$	0	10	20	30	40
$\nu (10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})$	1,79	1,31	1,00	0,80	0,66

Air (20°C , 1 atm) : $\rho = 1,20 \text{ kg/m}^3$; $\nu = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. **Mercure** : $\rho = 13\,600 \text{ kg/m}^3$.

Eau de mer : $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$.

Pression atmosphérique normale : $101\,325 \text{ Pa} = 1,013 \text{ bar} = 10,33 \text{ mCE} = 760 \text{ mmHg}$.

Rugosités : PVC/PEHD 0,001–0,01 mm ; acier neuf 0,05–0,1 mm ; fonte revêtue 0,1 mm ; fonte incrustée 1–3 mm ; béton 0,3–3 mm.

Coefficients de perte singulière : entrée franche 0,5 ; entrée profilée 0,05 ; sortie réservoir 1,0 ; coude 90° court 1,0 ; coude 90° grand rayon 0,3 ; vanne ouverte 0,15 ; clapet 2,2 ; crépine-clapet 3.

14 Annexe C — Rappels mathématiques utiles

14.1 Opérateurs vectoriels (coordonnées cartésiennes)

Pour un champ scalaire $f(x, y, z)$ et un champ vectoriel $\vec{V} = (u, v, w)$:

- **Gradient** (vecteur) : $\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ — il pointe dans le sens des f croissants ; en hydrostatique, $\vec{\nabla}p = \rho \vec{g}$.
- **Divergence** (scalaire) : $\text{div } \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ — flux volumique sortant par unité de volume ; nulle pour un fluide incompressible.

- **Rotationnel** (vecteur) : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ — double de la vitesse de rotation locale.
- **Laplacien** : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Identités utiles : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\nabla} f) = \vec{0}$ (un champ de gradient est irrotationnel) ; $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = 0$.

14.2 Géométrie des surfaces usuelles

Surface	Aire	Position du centre de gravité	I_G (axe horizontal par G)
Rectangle $b \times a$	ba	mi-hauteur	$ba^3/12$
Triangle (base b , hauteur a)	$ba/2$	$a/3$ depuis la base	$ba^3/36$
Cercle, diamètre D	$\pi D^2/4$	centre	$\pi D^4/64$
Demi-cercle, rayon R	$\pi R^2/2$	$4R/3\pi$ du diamètre	$0,1098 R^4$

Théorème de Huygens : $I_\Delta = I_G + S d^2$ où d est la distance entre l'axe Δ et l'axe parallèle passant par G .

Volumes : cylindre $\pi D^2 h/4$; sphère $\pi D^3/6$; cône $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ (centre de gravité à $h/4$ de la base).

14.3 Intégrales et développements utiles

$$\int y dy = \frac{y^2}{2}; \quad \int y^2 dy = \frac{y^3}{3}; \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y}; \quad \int e^{ay} dy = \frac{e^{ay}}{a}$$

Développements limités au voisinage de 0 : $(1+x)^n \approx 1+nx$; $\sin x \approx x$; $\ln(1+x) \approx x$.
Le premier justifie de nombreuses linéarisations (petites variations de niveau, faibles compressibilités).

Résolution itérative d'une équation implicite $x = g(x)$ (type Colebrook) : partir d'une estimation x_0 , calculer $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$... jusqu'à stabilisation ; deux à trois itérations suffisent en pratique pour λ .

14.4 Trigonométrie

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; composantes d'une force F inclinée de α : $F\cos\alpha$ (horizontale), $F\sin\alpha$ (verticale) ; résultante de deux composantes orthogonales : $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, $\tan\beta = F_y/F_x$.

Valeurs usuelles : $\sin 30^\circ = 0,5$; $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0,707$; $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = 0,866$; $\tan 45^\circ = 1$.

14.5 Unités SI et conversions

Grandeur	Unité SI	Conversions usuelles
Longueur	m	1 pouce = 25,4 mm
Masse	kg	1 tonne = 1000 kg
Force	N	1 kgf = 9,81 N ; 1 daN $\approx$ 1 kgf
Pression	Pa	1 bar = 10^5 Pa = 10,2 mCE ; 1 atm = 101 325 Pa
Énergie	J	1 kWh = 3,6 MJ
Puissance	W	1 ch = 736 W
Débit	m ³ /s	1 m ³ /h = 0,278 L/s ; 1 L/s = 3,6 m ³ /h
Viscosité dynamique	Pa·s	1 poise = 0,1 Pa·s
Viscosité cinématique	m ² /s	1 stokes = 10^{-4} m ² /s

Préfixes : $\mu = 10^{-6}$; m = 10^{-3} ; k = 10^3 ; M = 10^6 ; G = 10^9 .

14.6 Alphabet grec utilisé dans ce cours

α alpha (angle, coefficient de Coriolis) — β bêta (angle, coefficient de Boussinesq) — γ gamma (poids volumique) — Δ delta (variation) — ε epsilon (rugosité) — η éta (rendement) — θ thêta (angle de contact) — λ lambda (coefficient de perte de charge, échelle) — μ mu (viscosité dynamique) — ν nu (viscosité cinématique) — π pi — ρ rhô (masse volumique) — σ sigma (tension superficielle) — τ tau (contrainte de cisaillement) — φ, ψ phi, psi (potentiel et fonction de courant) — ω, Ω oméga (vitesse angulaire, tourbillon).

14.7 Conseils de méthode pour les examens

1. **Toujours commencer par un schéma** coté et orienté (axes, sens de l'écoulement, niveaux de référence).

2. **Lister les données en unités SI** avant tout calcul ; convertir immédiatement les litres, bars et millimètres.
3. **Écrire les hypothèses** (fluide parfait ou réel, régime permanent, incompressible) et le théorème utilisé sous sa forme littérale.
4. **Mener le calcul littéral jusqu'au bout**, puis faire une seule application numérique : les erreurs se corrigent mieux et le correcteur valorise la démarche.
5. **Contrôler l'homogénéité** de chaque formule littérale (annexe C) et la vraisemblance du résultat : une vitesse en conduite de 30 m/s, une pression négative inférieure à $-10,33$ mCE ou un rendement supérieur à 1 signalent une erreur.
6. **Soigner les signes** dans les cheminements manométriques et les projections du théorème d'Euler : la moitié des erreurs d'examen s'y concentrent.
7. **Encadrer les résultats** avec leurs unités et un nombre de chiffres significatifs raisonnable (trois suffisent en hydraulique).

15 Annexe D — Équations de Navier–Stokes : formulation tensorielle et coordonnées cylindriques

Cette annexe, destinée aux étudiants souhaitant approfondir (et utile pour les enseignements ultérieurs d'hydraulique et de CFD), établit les équations de Navier–Stokes dans leur généralité à partir du tenseur des contraintes, puis en donne l'écriture complète en coordonnées cylindriques.

15.1 Le tenseur des contraintes

15.1.1 État de contrainte en un point

Dans un fluide en mouvement, l'action des particules voisines sur une facette de normale $\vec{n}$ est décrite par le **vecteur contrainte** $\vec{T}(\vec{n})$, qui n'est plus normal à la facette (contrairement au fluide au repos ou au fluide parfait). Le théorème de Cauchy montre que $\vec{T}$ dépend linéairement de $\vec{n}$:

$$\vec{T}(\vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}$$

où $\bar{\bar{\sigma}}$ est le **tenseur des contraintes**, symétrique (conséquence du bilan de moment cinétique), de composantes σ_{ij} : contrainte sur la facette de normale j , dans la direction i . Les termes diagonaux $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ sont les contraintes normales, les termes croisés

$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, etc., les contraintes de cisaillement — l'analogie avec le tenseur des contraintes de la mécanique des milieux continus (résistance des matériaux, mécanique des sols) est complète.

On sépare la pression (partie sphérique) de la partie visqueuse (déviateur) :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker et $\bar{\tau}$ le **tenseur des contraintes visqueuses**, nul pour un fluide au repos ou un fluide parfait : on retrouve alors $\vec{T} = -p\vec{n}$, l'isotropie de la pression du chapitre 2.

15.1.2 Tenseur des taux de déformation

Le champ de vitesse déforme les particules. La partie symétrique du gradient de vitesse définit le **tenseur des taux de déformation** :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Ses termes diagonaux mesurent les taux d'élongation, ses termes croisés les taux de glissement (cisaillement) ; sa trace vaut $\text{div } \vec{V}$ (taux de dilatation volumique). La partie antisymétrique du gradient de vitesse correspond à la rotation en bloc (tourbillon, chapitre 3) et **ne produit aucune contrainte** : une rotation rigide ne déforme pas le fluide.

15.1.3 Loi de comportement du fluide newtonien

Un **fluide newtonien** est un fluide dont les contraintes visqueuses dépendent linéairement et isotropiquement des taux de déformation :

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} + \eta' (\text{div } \vec{V}) \delta_{ij}$$

où μ est la viscosité dynamique et η' la seconde viscosité (hypothèse de Stokes : $\eta' = -\frac{2}{3}\mu$), qui disparaît en incompressible puisque $\text{div } \vec{V} = 0$:

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Vérification sur le cisaillement simple (écoulement de Couette du chapitre 1, $u(y)$ seul) : $\tau_{xy} = \mu du/dy$ — la loi de Newton du chapitre 1 est le cas particulier unidimensionnel de cette loi tensorielle.

15.2 Bilan de quantité de mouvement : équation de Cauchy

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un domaine fluide, avec le théorème de la divergence pour transformer les efforts de surface en terme volumique, donne l'**équation de Cauchy**, valable pour **tout** milieu continu (fluide newtonien ou non, plastique, béton frais...) :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \overrightarrow{\text{div}} \vec{\sigma} \quad \text{soit} \quad \rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

(somme sur l'indice répété j ; D/Dt est la dérivée particulaire du chapitre 3).

En y injectant $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

puis la loi newtonienne incompressible $\tau_{ij} = \mu (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$, dont la divergence vaut, en utilisant $\overrightarrow{\text{div}} \vec{V} = 0$:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \mu \Delta u_i$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

on retrouve les équations de **Navier-Stokes incompressibles** du chapitre 6 :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{V}}$$

La chaîne logique complète est donc : *bilan de quantité de mouvement (Cauchy, universel) + loi de comportement (newtonien) + incompressibilité (continuité) → Navier-Stokes.*

Changer la loi de comportement (fluide de Bingham pour le béton frais, loi puissance pour les boues) change uniquement le dernier maillon : l'équation de Cauchy demeure.

15.3 Écriture complète en coordonnées cylindriques (r, θ, z)

Les problèmes de conduites, de viscosimètres et d'écoulements tournants appellent les coordonnées cylindriques. Vitesse : $\vec{V} = (v_r, v_\theta, v_z)$. Attention : les vecteurs de base tournant avec θ , des termes supplémentaires (dits de courbure) apparaissent — on ne peut pas se contenter de « remplacer x, y par r, θ ».

Continuité (incompressible) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Quantité de mouvement, composante radiale r :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right)$$

Composante orthoradiale θ :

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$$

Composante axiale z :

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \Delta v_z$$

avec le laplacien scalaire :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Le terme $-\rho v_\theta^2/r$ de l'équation radiale est la force centrifuge (par unité de volume) ; c'est lui qui crée la surpression vers l'extérieur des écoulements tournants (vortex, coudes, cyclones dessableurs).

15.4 Application 1 — Poiseuille cylindrique, version détaillée

Hypothèses : régime permanent ($\partial/\partial t = 0$), écoulement établi et axisymétrique ($v_r = v_\theta = 0, \partial/\partial \theta = 0$), conduite horizontale d'axe z (pesanteur reprise dans la pression étoilée $p^* = p + \rho gh$).

- La continuité donne $\partial v_z / \partial z = 0$: $v_z = v_z(r)$ seulement.
- L'équation radiale se réduit à $\partial p^* / \partial r = 0$: la pression étoilée est uniforme dans chaque section.
- L'équation axiale devient :

$$0 = -\frac{dp^*}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right)$$

Le membre de gauche de l'égalité $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dz}$ ne dépend que de r , le membre de droite que de z : chacun est donc **constant**, égal à $-\frac{\Delta p^*}{\mu L}$ (chute de pression Δp^* sur la longueur L). Première intégration :

$$r \frac{dv_z}{dr} = -\frac{\Delta p^*}{2\mu L} r^2 + A$$

La contrainte $\tau = \mu dv_z/dr$ devant rester finie à l'axe : $A = 0$. Seconde intégration avec l'adhérence $v_z(R) = 0$:

$$v_z(r) = \frac{\Delta p^*}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

On en déduit successivement (calculs du chapitre 6) : $u_{max} = \Delta p^* R^2 / 4\mu L$ à l'axe ; $U = u_{max}/2$; $Q = \pi \Delta p^* R^4 / 8\mu L$; $\lambda = 64/Re$.

Contrainte pariétale. $\tau_p = \mu \left| \frac{dv_z}{dr} \right|_{r=R} = \frac{\Delta p^* R}{2L} = \frac{\rho g \Delta H D}{4L}$ — relation d'équilibre global (valable aussi en turbulent) que l'on retrouve en écrivant l'équilibre d'un cylindre fluide entre pression motrice et frottement pariétal.

15.5 Application 2 — Viscosimètre de Couette cylindrique, version détaillée

Deux cylindres coaxiaux de rayons $R_1 < R_2$; l'intérieur tourne à ω , l'extérieur est fixe. Régime permanent, écoulement purement orthoradial : $v_\theta = v(r)$, $v_r = v_z = 0$, $\partial/\partial\theta = \partial/\partial z = 0$.

L'équation orthoradiale se réduit à :

$$0 = \mu \left(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} \right) = \mu \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(rv)}{dr} \right]$$

Double intégration : $v(r) = Ar + \frac{B}{r}$, avec les conditions d'adhérence $v(R_1) = \omega R_1$ et $v(R_2) = 0$:

$$A = -\frac{\omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}; \quad B = \frac{\omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \Rightarrow \quad v(r) = \frac{\omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{R_2^2}{r} - r \right)$$

La contrainte de cisaillement en coordonnées cylindriques vaut $\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) = -\frac{2\mu B}{r^2}$, d'où le **couple** sur le cylindre intérieur (hauteur h) :

$$C = \tau_{r\theta}(R_1) \times (2\pi R_1 h) \times R_1 = \boxed{4\pi\mu h \omega \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}}$$

Le couple est proportionnel à μ et à ω : mesurer $C(\omega)$ donne directement la viscosité — principe du **viscosimètre rotatif**, y compris pour caractériser des fluides non newtoniens (la non-linéarité de $C(\omega)$ signale alors l'écart au comportement newtonien : c'est ainsi qu'on qualifie la maniabilité rhéologique des bétons autoplaçants).

Lien avec le chapitre 1. Si l'entrefer est mince ($e = R_2 - R_1 \ll R_1$), un développement limité donne $C \approx 2\pi\mu h \omega R_1^3/e$: on retrouve l'approximation du « Couette plan enroulé » utilisée dans l'exercice 1.4, dont on mesure ici précisément le domaine de validité.

15.6 Récapitulatif de la démarche générale

Face à un problème d'écoulement visqueux en géométrie simple, la méthode systématique est :

1. choisir le système de coordonnées adapté à la géométrie ;
2. **simplifier par les symétries** : composantes de vitesse nulles, dérivées nulles (permanent, établi, axisymétrique) — c'est l'étape décisive ;
3. vérifier la continuité (elle précise souvent la forme du champ) ;
4. écrire les composantes restantes de Navier–Stokes, identifier les termes constants (séparation des variables) ;
5. intégrer avec les **conditions aux limites** : adhérence aux parois, contrainte nulle aux surfaces libres, finitude sur l'axe, raccordement entre couches ;
6. en déduire les grandeurs d'ingénieur : débit, vitesse moyenne, contrainte pariétale, couple, puissance dissipée ;
7. **contrôler le domaine de validité** (Reynolds) : la solution laminaire cesse d'être physique au-delà de la transition.

C'est exactement la démarche suivie pour Poiseuille (chapitre 6 et ci-dessus), le film ruisselant (exercice 6.0) et le Couette cylindrique — les trois archétypes dont dérivent la plupart des solutions exactes utiles.

Bibliographie sommaire

- CARLIER M., *Hydraulique générale et appliquée*, Eyrolles.
- COMOLET R., *Mécanique expérimentale des fluides* (t. 1 et 2), Dunod.

- GRAF W. H., ALTINAKAR M. S., *Hydrodynamique*, PPUR.
- LENCASTRE A., *Hydraulique générale*, Eyrolles.
- MUNSON B. R., YOUNG D. F., OKIISHI T. H., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Wiley.
- WHITE F. M., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill.
- ÇENGEL Y. A., CIMBALA J. M., *Mécanique des fluides — Fondements et applications*, De Boeck.